А.В.Погорелов

ГЕОМЕТРИЯ

СТЕРЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК
ДЛЯ 10-11 КЛАССОВ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Утверждено Министерством образования и науки Украины

КИЕВ
"ШКОЛЯР"
2004

ББК 22.151я72
П43

Утверждено Министерством образования и науки Украины
(Письмо Министерства образования и науки Украины
№ 1/11-3801 от 17.09.2001)

Издано за счет государственных средств.
Продажа запрещена.

Погорелов А. В.
П43 Геометрия: Стереометрия: Учебник для 10–11 кл. общеобразоват. учебных заведений.— 4-е изд.— К: Школяр, 2004.— 142 с.

ISBN 966-7117-69-3

ББК 22.151я72

ISBN 966-7117-69-3

10 класс

§ 1. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ ПРОСТЕЙШИЕ СЛЕДСТВИЯ

1. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. В стереометрии, как и в планиметрии, свойства геометрических фигур устанавливают доказательством соответствующих теорем. При этом за исходные принимают свойства основных геометрических фигур, которые выражаются аксиомами. Основными фигурами в пространстве являются точка, прямая и плоскость.

Плоскость мы представляем как гладкую поверхность стола (рис. 1, *а*) и будем изображать ее в виде параллелограмма (рис. 1, *б*). Плоскость, как и прямая, бесконечна. На рисунке мы изображаем только часть плоскости, но представляем ее неограниченно продолженной во все стороны. Плоскости обозначают греческими буквами α, β, γ, ...

Введение нового геометрического образа — плоскости требует расширения системы аксиом. Поэтому мы вводим группу аксиом С, выражающую основные свойства плоскостей в пространстве. Эта группа состоит из таких трех аксиом:

C_1. ***Какая бы ни была плоскость, существуют точки, которые принадлежат этой плоскости, и точки, которые ей не принадлежат.***

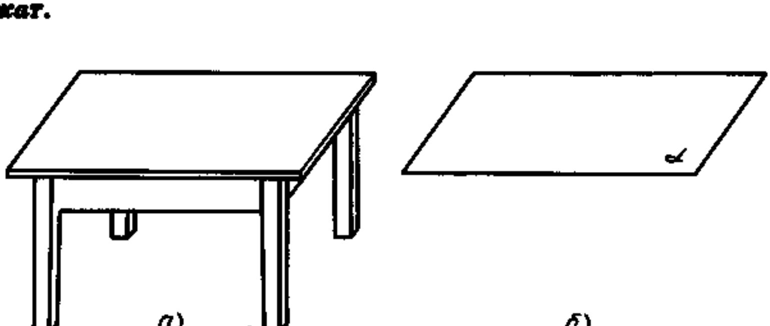


Рис. 1

C_2. ***Если две разные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.***

Эта аксиома утверждает, что если две разные плоскости α и β имеют общую точку, то существует прямая c, которая принадлежит каждой из этих плоскостей. При этом, если точка C принадлежит обеим плоскостям, то она принадлежит прямой c.

C_3. ***Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.***

Это значит, что если две различные прямые a и b имеют общую точку C, то существует плоскость γ, которая содержит прямые a и b. Плоскость, имеющая это свойство, единственна.

Таким образом, система аксиом стереометрии состоит из аксиом I—IX планиметрии и группы аксиом C.

Замечание. В планиметрии мы имели одну плоскость, на которой размещались все рассматриваемые фигуры. В стереометрии много, даже бесконечно много, плоскостей. В связи с этим формулировки некоторых аксиом планиметрии, как аксиом стереометрии, требуют уточнения. Это касается, например, аксиом IV, VII, VIII, IX. Приведем эти уточненные формулировки.

IV. Прямая, *принадлежащая плоскости*, разбивает эту плоскость на две полуплоскости.

VII. От полупрямой *на плоскости, которая содержит ее*, можно отложить в заданную полуплоскость угол с данной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

VIII. Каким бы ни был треугольник, существует треугольник, равный ему *в данной плоскости* в заданном расположении относительно данной полупрямой в этой плоскости.

IX. *На плоскости* через данную точку, которая не лежит на данной прямой, можно провести не больше одной прямой, параллельной данной.

Для удобства изложения напомним аксиому I.

I. Какой бы ни была прямая, существуют точки, которые принадлежат этой прямой, и точки, которые не принадлежат ей. Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ПРЯМУЮ И ДАННУЮ ТОЧКУ

Теорема 1.1. ***Через прямую и точку, не лежащую на ней, можно провести плоскость, и притом только одну.***

Доказательство. Пусть AB — данная прямая и C — точка, которая не лежит на ней (рис. 2). Проведем через точки A и C прямую (аксиома I). Прямые AB и AC различные, так как точка C не лежит на прямой AB. Проведем через прямые

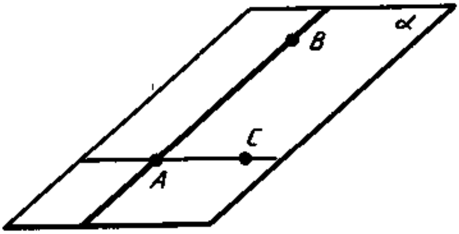


Рис. 2

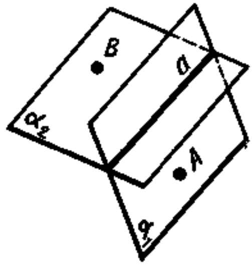


Рис. 3

AB и *AC* плоскость α (аксиома C_3). Она проходит через прямую *AB* и точку *C*.

Докажем, что плоскость α, которая проходит через прямую *AB* и точку *C*, единственна.

Допустим, существует другая плоскость α', проходящая через прямую *AB* и точку *C*. По аксиоме C_2 плоскости α и α' пересекаются по прямой. Эта прямая должна содержать точки *A*, *B*, *C*. Но они не лежат на одной прямой. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Задача (7). Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости.

Решение. Пусть *A* — данная прямая (рис. 3). По аксиоме I существует точка *A*, не лежащая на прямой *a*. По теореме 1.1 через прямую *a* и точку *A* можно провести плоскость. Обозначим ее через α_1. По аксиоме C_1 существует точка *B*, которая не лежит в плоскости α_1. Проведем через прямую *a* и точку *B* плоскость α_2. Плоскости α_1 и α_2 различны, так как точка *B* плоскости α_2 не лежит на плоскости α_1.

3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ

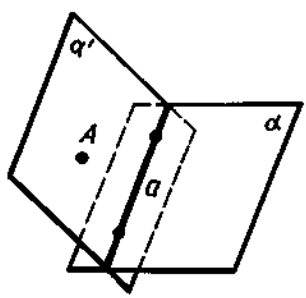


Рис. 4

Теорема 1.2. ***Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.***

Доказательство. Пусть *a* — данная прямая и α — данная плоскость (рис. 4). По аксиоме I существует точка *A*, не лежащая на прямой *a*. Проведем через прямую *a* и точку *A* плоскость α'. Если плоскость α' совпадает с α, то плоскость α содержит прямую *a*, что и утверждает теорема. Если плоскость α' отлична

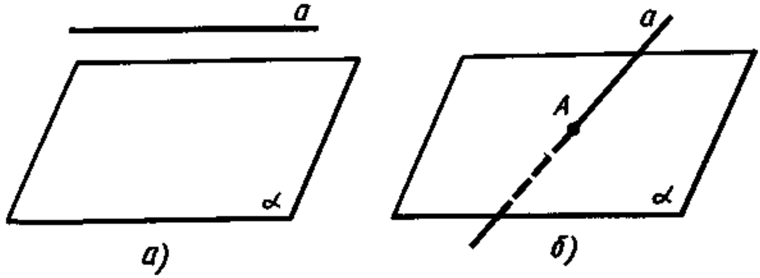


Рис. 5

от α, то эти плоскости пересекаются по прямой a', содержащей две точки прямой a. По аксиоме I прямая a' совпадает с a и, значит, прямая a лежит в плоскости α. Теорема доказана.

Из теоремы 1.2 следует, что ***плоскость и прямая, не лежащая на ней, или не пересекаются, или пересекаются в одной точке*** (рис. 5).

Задача (9). Даны две различные прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.

Решение. Проведем через данные прямые a и b плоскость α (рис. 6). Это можно сделать по аксиоме C_3. Прямая c, пересекающая данные прямые, имеет с плоскостью α две общие точки M и N (точки пересечения с данными прямыми). По теореме 1.2 эта прямая должна лежать в плоскости α.

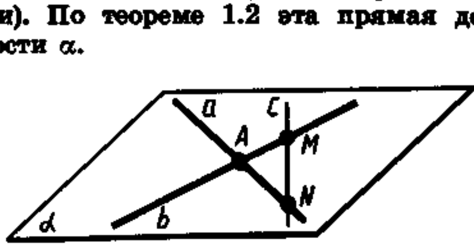


Рис. 6

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТРИ ДАННЫЕ ТОЧКИ

Теорема 1.3. ***Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.***

Доказательство. Пусть A, B, C — три данные точки, не лежащие на одной прямой (рис. 7). Проведем прямые AB и AC; они различны, так как точки A, B, C не лежат на

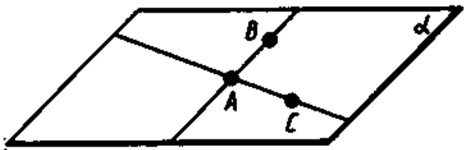


Рис. 7

одной прямой. По аксиоме C_3 через прямые AB и AC можно провести плоскость α. Эта плоскость содержит точки A, B, C.

Докажем, что плоскость α, проходящая через точки A, B, C, единственна. Действительно, плоскость, проходящая через точки A, B, C, по теореме 1.2 содержит прямые AB и AC. А по аксиоме C_3 такая плоскость единственна.

Задача (13). Можно ли провести плоскость через три точки, если они лежат на одной прямой? Ответ объясните.

Решение. Пусть A, B, C — три точки, лежащие на прямой a. Возьмем точку D, не лежащую на прямой a (аксиома I). Через точки A, B, D можно провести плоскость (теорема 1.3). Эта плоскость содержит две точки прямой a — точки A и B, а потому содержит и точку C этой прямой (теорема 1.2). Значит, через три точки, лежащие на одной прямой, всегда можно провести плоскость.

5. ЗАМЕЧАНИЕ К АКСИОМЕ I

Аксиома I в списке аксиом стереометрии приобретает другой смысл, чем в планиметрии. В планиметрии эта аксиома утверждает существование точек вне данной прямой *на плоскости*, в которой лежит прямая. Именно в таком смысле эта аксиома применялась в процессе построения геометрии на плоскости. Теперь эта аксиома утверждает вообще существование точек, не лежащих на данной прямой. Из нее непосредственно не следует, что существуют точки вне данной прямой на плоскости, в которой лежит прямая. Это требует специального доказательства. Дадим такое доказательство.

Пусть α — плоскость и a — прямая в этой плоскости (рис. 8). Докажем существование точек в плоскости α, не лежащих на прямой a.

Обозначим точку A на прямой a и точку A' вне плоскости α. Через прямую a и точку A' проведем плоскость α'.

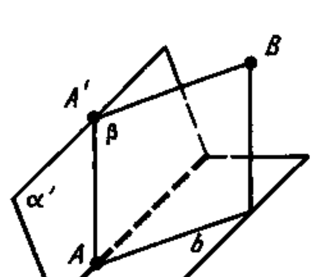


Рис. 8

Возьмем точку B вне плоскости α' и проведем через прямую AA' и точку B плоскость β. Плоскости α и β пересекаются по прямой b, проходящей через точку A и отличной от прямой a. Точки этой прямой, отличные от A, лежат в плоскости α вне прямой a, что и требовалось доказать.

6. РАЗБИЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПЛОСКОСТЬЮ НА ДВА ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Теорема 1.4. ***Плоскость разбивает пространство на два полупространства. Если точки X и Y принадлежат одному полупространству, то отрезок XY не пересекает плоскость. Если же точки X и Y принадлежат различным полупространствам, то отрезок XY пересекает плоскость.***

Доказательство (не для запоминания). Пусть α — данная плоскость. Обозначим точку A, не лежащую на плоскости α. Такая точка существует по аксиоме C_1. Разобьем все точки пространства, не лежащие на плоскости α, на два полупространства таким образом. Точку X отнесем к первому полупространству, если отрезок AX не пересекает плоскость α и ко второму полупространству — если отрезок AX пересекает плоскость α. Покажем, что это разбиение пространства имеет свойства, названные в теореме.

Пусть точки X и Y принадлежат первому полупространству. Проведем через точки A, X и Y плоскость α'. Если плоскость α' не пересекает плоскость α, то отрезок XY также не пересекает эту плоскость. Допустим, плоскость α' пересекает плоскость α (рис. 9). Так как плоскости различны, то они пересекаются по некоторой прямой a. Прямая a разбивает плоскость α' на две полуплоскости. Точки X и Y принадлежат одной полуплоскости, а именно той, в которой лежит точка A. Поэтому отрезок XY не пересекает прямую a, а следовательно, и плоскость α.

Если точки X и Y принадлежат второму полупространству, то плоскость α' заведомо пересекает плоскость α, так как отрезок AX пересекает плоскость α. Точки X и Y принадлежат одной полуплоскости разбиения плоскости α' прямой a. Отсюда отрезок XY не пересекает прямую a, а следовательно, и плоскость α.

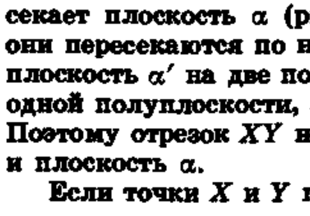


Рис. 9

Если же точка X принадлежит одному полупространству, а точка Y — другому, то плоскость α' пересекает плоскость α, а точки X и Y лежат в различных полуплоскостях плоскости α' относительно прямой a. Поэтому отрезок XY пересекает прямую a, а следовательно, и плоскость α. Теорема доказана.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое стереометрия?
2. Сформулируйте аксиомы группы С.
3. Докажите, что через прямую и точку, не лежащую на ней, можно провести плоскость, и притом только одну.
4. Докажите, что если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.
5. Докажите, что через три точки, не лежащие на одной прямой можно провести плоскость, и притом только одну.

ЗАДАЧИ

1. Точки A, B, C, D не лежат на одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD не пересекаются.
2. Можно ли через точку пересечения двух данных прямых провести третью прямую, не лежащую с ними в одной плоскости? Ответ объясните.
3. Точки A, B, C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.
4. Даны три различные попарно пересекающиеся плоскости. Докажите, что если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения (рис. 10).
5. Даны две плоскости, пересекающиеся по прямой a, и прямая b, лежащая в одной из этих плоскостей

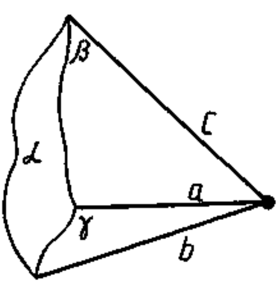


Рис. 10

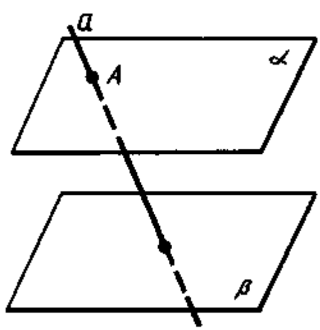


Рис. 11

и пересекающая другую. Докажите, что прямые a и b пересекаются.

6. Четыре точки не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-нибудь три из них лежать на одной прямой? Ответ объясните.
7. Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости.
8* Даны две непересекающиеся плоскости. Докажите, что прямая, пересекающая одну из этих плоскостей, пересекает и другую (рис. 11).
9. Даны две различные прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, пересекающие обе данные прямые и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.
10. Докажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку вне прямой, лежат в одной плоскости.
11. Докажите, что если прямые AB и CD не лежат в одной плоскости, то прямые AC и BD также не лежат в одной плоскости.
12. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько можно провести различных плоскостей, проходящих через три из этих точек? Ответ объясните.
13. Можно ли провести плоскость через три точки, если они лежат на одной прямой? Ответ объясните.
14* Даны четыре точки. Известно, что прямая, проходящая через любые две из этих точек, не пересекается с прямой, проходящей через другие две точки. Докажите, что данные четыре точки не лежат в одной плоскости.

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

7. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Прямые, не пересекающиеся и не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися* (рис. 12).

Задача (3). Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.

Решение. Так как данные прямые a и b параллельны, то через них можно провести плоскость (рис. 13). Обозначим ее α. Прямая c, пересекающая данные параллельные прямые, имеет с плоскостью α две общие точки — точки

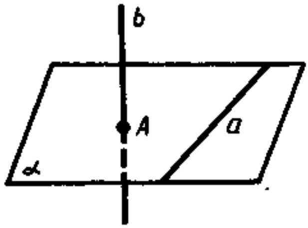


Рис. 12

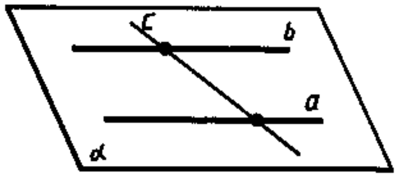


Рис. 13

пересечения с данными прямыми. По теореме 1.2 эта прямая лежит в плоскости α. Таким образом, все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости — плоскости α.

Теорема 2.1. ***Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.***

Замечание. Утверждение единственности в теореме 2.1 не является простым следствием аксиомы параллельных, так как этой аксиомой утверждается единственность прямой, параллельной данной в данной плоскости. Поэтому это утверждение требует доказательства.

Доказательство. Пусть a — данная прямая и A — точка, не лежащая на этой прямой (рис. 14). Проведем через прямую a и точку A плоскость α. Проведем через точку A в плоскости α прямую a_1, параллельную a. Докажем, что прямая a_1, параллельная a, единственна.

Допустим, что существует другая прямая a_2, которая проходит через точку A и параллельна прямой a. Через прямые a и a_2 можно провести плоскость α_2.

Плоскость α_2 проходит через прямую a и точку A; поэтому по теореме 1.1 она совпадает с α. Тогда по аксиоме параллельных прямые a_1 и a_2 совпадают. Теорема доказапа.

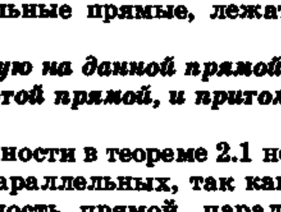


Рис. 14

8. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Теорема 2.2. ***Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.***

Доказательство. Пусть прямые b и c параллельны прямой a. Докажем, что прямые b и c параллельны.

Случай, когда прямые a, b, c лежат в одной плоскости, был рассмотрен в планиметрии. Поэтому предположим, что наши прямые не лежат в одной плоскости. Пусть β — плоскость, в которой лежат прямые a и b, а γ — плоскость, в которой лежат прямые a и c. Плоскости β и γ различны (рис. 15). Возьмем на прямой b произвольную точку B и проведем плоскость γ_1 через прямую c и точку B. Она пересечет плоскость β по прямой b_1.

Прямая b_1 не пересекает плоскость γ. Действительно, точка пересечения должна принадлежать прямой a, так как прямая b_1 лежит в плоскости β. С другой стороны, она должна лежать на прямой c, так как прямая b_1 лежит в плоскости γ_1. Но прямые a и c как параллельные не пересекаются.

Так как прямая b_1 лежит в плоскости β и не пересекает прямую a, то она параллельна прямой a, и значит, совпадает с b по аксиоме параллельных. Таким образом, прямая b, совпадая с прямой b_1, лежит в одной плоскости с прямой c (в плоскости γ_1) и не пересекает ее. Значит, прямые b и c параллельны. Теорема доказана.

Задача (11). Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).

Решение. Пусть $ABCD$ — данный пространственный четырехугольник, а A_1, B_1, C_1, D_1 — середины его сторон (рис. 16). Тогда A_1B_1 — средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AC, C_1D_1 — средняя линия треугольника ACD, также параллельная стороне AC. По теореме 2.2 прямые A_1B_1 и C_1D_1 параллельны, поэтому лежат в одной плоскости. Аналогично доказываем параллельность прямых A_1D_1 и B_1C_1. Таким образом, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ лежит в одной плоскости и его противолежащие стороны параллельны. Следовательно, он параллелограмм.

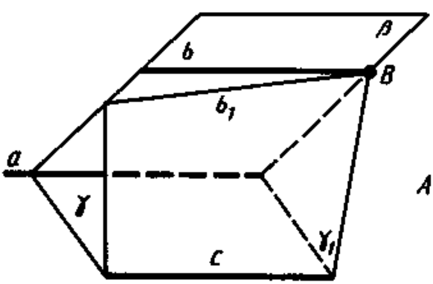


Рис. 15

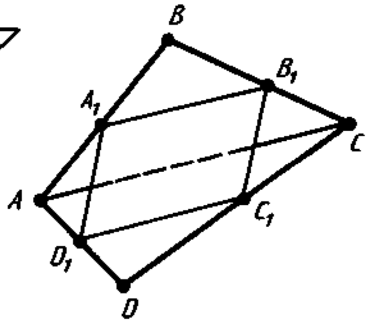


Рис. 16

9. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Теорема 2.3. ***Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.***

Доказательство. Пусть α — плоскость, a — прямая, не принадлежащая ей, и a_1 — прямая в плоскости α, параллельная прямой a. Проведем плоскость α_1 через прямые a и a_1 (рис. 17). Плоскости α и α_1 пересекаются по прямой a_1. Если бы прямая a пересекала плоскость α, то точка пересечения принадлежала бы прямой a_1. Но это невозможно, так как a и a_1 параллельны. Значит, прямая a не пересекает плоскость α, а поэтому параллельна плоскости α. Теорема доказана.

Задача (15). Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

Решение. Пусть a и b — две параллельные прямые и α — плоскость, пересекающая прямую a в точке A (рис. 18). Проведем через прямые a и b плоскость. Она пересечет плоскость α по некоторой прямой c. Прямая c пересекает прямую a (в точке A), а следовательно, пересекает параллельную ей прямую b. Так как прямая c лежит в плоскости α, то плоскость α пересекает прямую b.

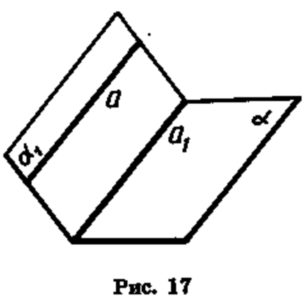


Рис. 17

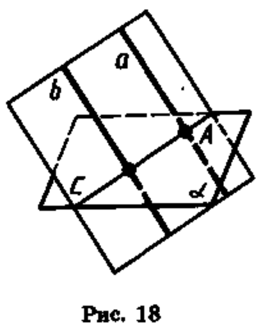


Рис. 18

10. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Теорема 2.4. ***Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым второй плоскости, то эти плоскости параллельны.***

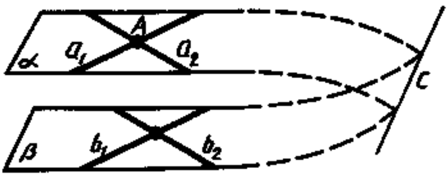


Рис. 19

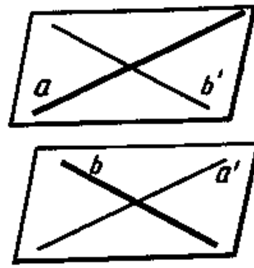


Рис. 20

Доказательство. Пусть α и β — данные плоскости, a_1 и a_2 — две прямые в плоскости α, пересекающиеся в точке A, b_1 и b_2 — соответственно параллельные им прямые в плоскости β (рис. 19). Допустим, что плоскости α и β не параллельны, то есть пересекаются по какой-нибудь прямой c. По теореме 2.3 прямые a_1 и a_2, как параллельные прямым b_1 и b_2, параллельны плоскости β, и поэтому они не пересекают прямую c, лежащую в этой плоскости. Таким образом, в плоскости α через точку A проходят две прямые (a_1 и a_2), параллельные прямой c. Но это невозможно по аксиоме параллельных. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Задача (19). Докажите, что через две скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости.

Решение. Пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые (рис. 20). Через произвольную точку прямой a проведем прямую b', параллельную b, а через произвольную точку прямой b проведем прямую a', параллельную a. Теперь проведем две плоскости — одну — через прямые a и b', а вторую — через b и a'. По теореме 2.4 эти плоскости параллельны. В первой из них лежит прямая a, а во второй — прямая b.

11. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ДАННОЙ ПЛОСКОСТИ

Теорема 2.5. *Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.*

Доказательство. Проведем в данной плоскости α какие-нибудь две пересекающиеся прямые a и b (рис. 21). Через данную точку A проведем параллельные им прямые a_1 и b_1. Плоскость β, проходящая через a_1 и b_1, по теореме 2.4 параллельна плоскости α.

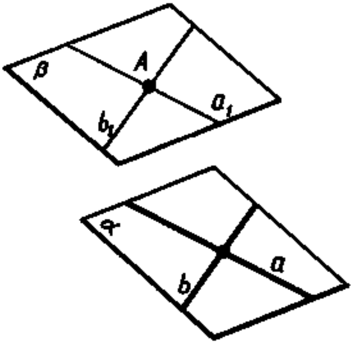


Рис. 21

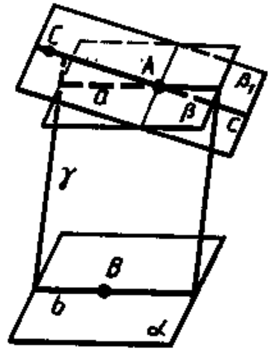


Рис. 22

Допустим, что через точку A проходит другая плоскость β_1, также параллельная плоскости α (рис. 22). Обозначим на плоскости β_1 произвольную точку C, не лежащую в плоскости β. Проведем плоскость γ через точки A, C и какую-нибудь точку B плоскости α. Эта плоскость пересечет плоскости α, β и β_1 по прямым a, b и c. Прямые a и c не пересекают прямую b, поскольку не пересекают плоскость α. Следовательно, они параллельны прямой b. Но в плоскости γ через точку A можно провести только одну прямую, параллельную прямой b. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Задача (23). Плоскости α и β параллельны плоскости γ. Могут ли плоскости α и β пересекаться?

Решение. Плоскости α и β не могут пересекаться. Если бы плоскости α и β имели общую точку, то через эту точку проходили бы две плоскости (α и β), параллельные плоскости γ. А это противоречит теореме 2.5.

12. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны (рис. 23).

Действительно, по определению параллельные прямые — это прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся. Наши прямые лежат в одной плоскости — секущей плоскости. Они не пересекаются, так как не пересекаются параллельные плоскости, содержащие их. Следовательно, прямые параллельны, что и требовалось доказать.

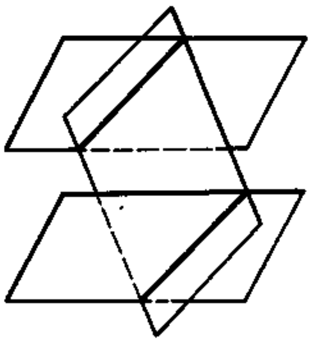


Рис. 23

Задача (33). Даны две параллельные плоскости α_1 и α_2 и точка A, не лежащая ни в одной из этих плоскостей. Через точку A проведена произвольная прямая. Пусть X_1 и X_2 — точки пересечения ее с плоскостями α_1 и α_2. Докажите, что отношение длин отрезков $AX_1 : AX_2$ не зависит от взятой прямой.

Решение. Проведем через точку A другую прямую и обозначим через Y_1 и Y_2 точки пересечения ее с плоскостями α_1 и α_2 (рис. 24). Проведем через прямые AX_1 и AY_1 плоскость. Она пересечет плоскости α_1 и α_2 по параллельным прямым X_1Y_1 и X_2Y_2. Отсюда следует подобие треугольников AX_1Y_1 и AX_2Y_2. А из подобия треугольников следует пропорция

$$\frac{AX_1}{AX_2}=\frac{AY_1}{AY_2},$$

то есть отношения $AX_1 : AX_2$ и $AY_1 : AY_2$ одинаковы для обеих прямых.

Отрезки параллельных прямых, находящиеся между двумя параллельными плоскостями, равны.

Действительно, пусть α_1 и α_2 — параллельные плоскости, a и b — параллельные прямые, пересекающие их, A_1, A_2 и B_1, B_2 — точки пересечения прямых с плоскостями (рис. 25). Проведем через прямые a и b плоскость. Она пересекает плоскости α_1 и α_2 по параллельным прямым A_1B_1 и A_2B_2. Четырех-

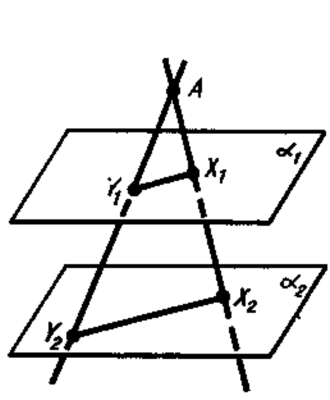


Рис. 24

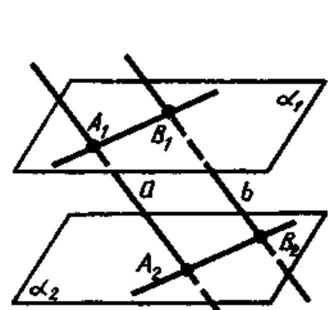


Рис. 25

угольник $A_1B_1B_2A_2$ — параллелограмм, так как у него противолежащие стороны параллельны. А у параллелограмма противолежащие стороны равны. Следовательно, $A_1A_2=B_1B_2$, что и требовалось доказать.

13. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ

Для изображения пространственных фигур на плоскости, как правило, пользуются параллельным проектированием. Рассмотрим этот способ изображения фигуры. Берем произвольную прямую h, пересекающую плоскость чертежа α, проводим через произвольную точку A фигуры прямую, параллельную h. Точка A_1 пересечения этой прямой с плоскостью чертежа будет изображением точки A (рис. 26). Построив таким образом изображение каждой точки фигуры, получим изображение самой фигуры. Такой способ изображения пространственной фигуры на плоскости соответствует зрительному восприятию фигуры при рассмотрении ее издали.

Приведем некоторые свойства изображения фигуры на плоскости, вытекающие из описанного ее построения.

Прямолинейные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа отрезками (рис. 27).

Действительно, все прямые, проектирующие точки отрезка AC, лежат в одной плоскости, пересекающей плоскость чертежа α по прямой A_1C_1. Произвольная точка B отрезка AC изображается точкой B_1 отрезка A_1C_1.

Замечание. В только что доказанном свойстве и далее предполагается обычно, что проектируемые отрезки не параллельны направлению проектирования.

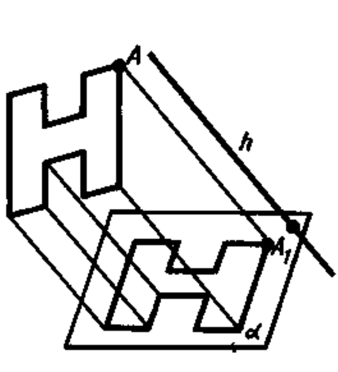


Рис. 26

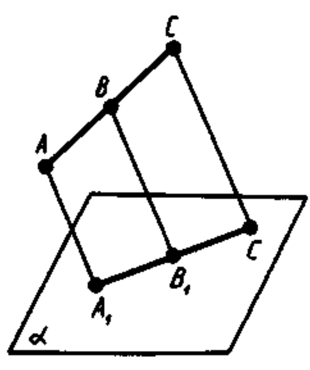


Рис. 27

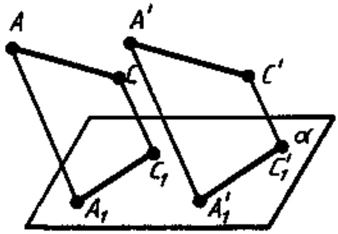


Рис. 28

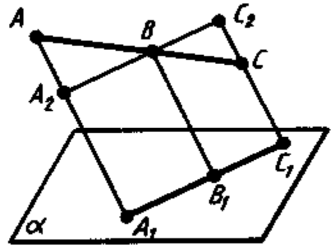


Рис. 29

Параллельные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа параллельными отрезками **(рис. 28).**

Действительно, пусть AC и $A'C'$ — параллельные отрезки фигуры. Прямые A_1C_1 и $A_1'C_1'$ параллельны, так как их мы получили в результате пересечения параллельных плоскостей с плоскостью α. Первая из этих плоскостей проходит через прямые AC и AA_1, а вторая — через прямые $A'C'$ и $A'A_1'$.

Отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется при параллельном проектировании.

Покажем, например, что (рис. 29)

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}. \qquad (*)$$

Проведем через точку B прямую A_2C_2, параллельную A_1C_1. Треугольники BAA_2 и BCC_2 подобны. Из подобия треугольников и равенств $A_1B_1=A_2B$ и $B_1C_1=BC_2$ следует пропорция (*).

Задача (37). Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции медиан этого треугольника?

Решение. При параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков прямой. Поэтому середина стороны треугольника проектируется в середину проекции этой стороны. Отсюда следует, что проекции медиан треугольника будут медианами его проекции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
2. Какие прямые называются скрещивающимися?
3. Докажите, что через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.
4. Докажите признак параллельности прямых.
5. Что значит: прямая и плоскость параллельны?
6. Докажите признак параллельности прямой и плоскости.

7. Какие плоскости называются параллельными?
8. Докажите признак параллельности плоскостей.
9. Докажите, что через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.
10. Докажите, что если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.
11. Докажите, что отрезки параллельных прямых, находящиеся между двумя параллельными плоскостями, равны.
12. Перечислите свойства параллельного проектирования.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что если прямые AB и CD скрещивающиеся, то и прямые AC и BD также скрещивающиеся.
2. Можно ли через точку C, не принадлежащую скрещивающимся прямым a и b, провести две различные прямые, каждая из которых пересекает прямые a и b? Ответ объясните.
3. Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.
4. Прямые a и b пересекаются. Докажите, что все прямые, параллельные прямой b и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.
5. Через концы отрезка AB и его середину M проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1 и M_1. Найдите длину отрезка MM_1, если отрезок AB не пересекает плоскость (рис. 30) и если: 1) $AA_1 = 5$ м, $BB_1 = 7$ м; 2) $AA_1 = 3{,}6$ дм, $BB_1 = 4{,}8$ дм; 3) $AA_1 = 8{,}3$ см, $BB_1 = 4{,}1$ см; 4) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$.
6.* Решите предыдущую задачу при условии, что отрезок AB пересекает плоскость.

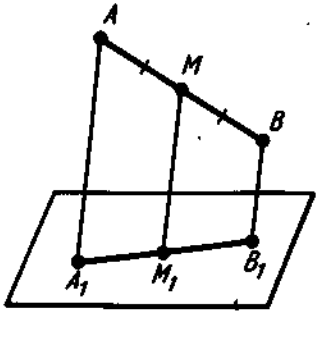


Рис. 30

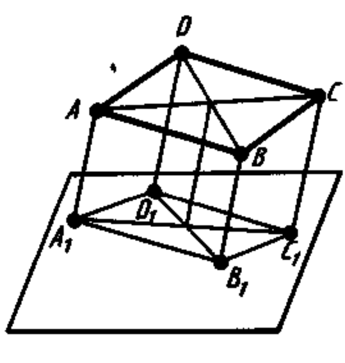


Рис. 31

7. Через конец A отрезка AB проведена плоскость. Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка BB_1, если: 1) $CC_1 = 15$ см, $AC : BC = 2 : 3$; 2) $CC_1 = 8{,}1$ см, $AB : AC = 11 : 9$; 3) $AB = 6$ см, $AC : CC_1 = 2 : 5$; 4) $AC = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.

8.* Даны параллелограмм $ABCD$ и плоскость, не пересекающая его. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1 (рис. 31). Найдите длину отрезка DD_1, если: 1) $AA_1 = 2$ м, $BB_1 = 3$ м, $CC_1 = 8$ м; 2) $AA_1 = 4$ м, $BB_1 = 3$ м, $CC_1 = 1$ м; 3) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

9. Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Можно ли провести прямую c, параллельную прямым a и b?

10. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AB и BC, параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AD и CD.

11. Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (вершины пространственного четырехугольника не лежат в одной плоскости).

12.* Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что прямые, соединяющие середины отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, пересекаются в одной точке.

13. Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A_1, а сторону BC — в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если: 1) $AB = 15$ см, $AA_1 : AC = 2 : 3$; 2) $AB = 8$ см, $AA_1 : A_1C = 5 : 3$; 3) $B_1C = 10$ см, $AB : BC = 4 : 5$; 4) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$.

14. Через данную точку проведите прямую, параллельную каждой из двух данных пересекающихся плоскостей.

15. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

16. Докажите, что через любую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой.

17. Докажите, что если две плоскости, пересекающиеся по прямой a, пересекают плоскость α по параллельным прямым, то прямая a параллельна плоскости α (рис. 32).

18. Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

19. Докажите, что через две скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости.

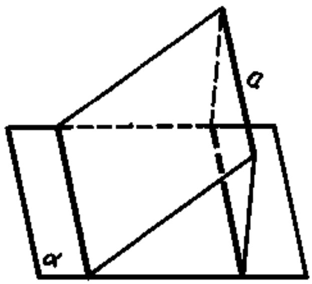


Рис. 32

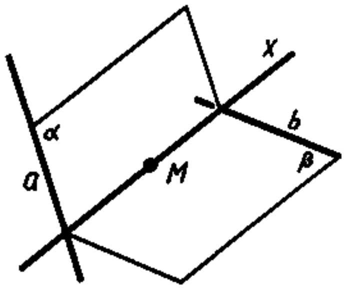


Рис. 33

20. Через данную точку пространства проведите прямую, пересекающую каждую из двух скрещивающихся прямых (рис. 33). Всегда ли это возможно?

21*. Докажите, что геометрическим местом середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых является плоскость, параллельная этим прямым (рис. 34).

22. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что любая плоскость, параллельная прямым AB и CD, пересекает прямые AC, AD, BD и BC в вершинах параллелограмма (рис. 35).

23. Плоскости α и β параллельны плоскости γ. Могут ли плоскости α и β пересекаться?

24. Плоскости α и β пересекаются. Докажите, что любая плоскость γ пересекает хотя бы одну из плоскостей α и β.

25. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку параллельно данной плоскости, лежат в одной плоскости.

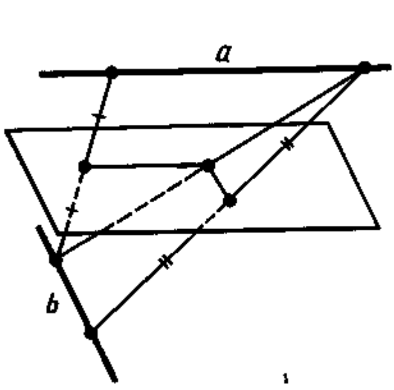


Рис. 34

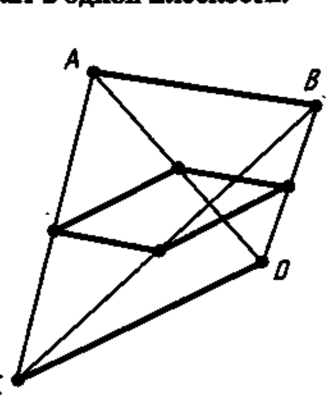


Рис. 35

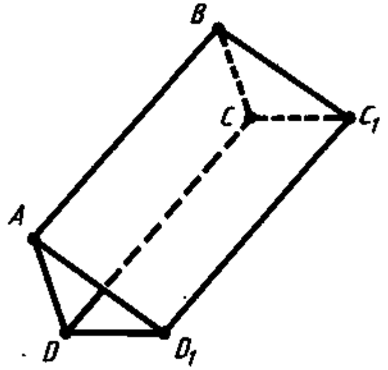


Рис. 36

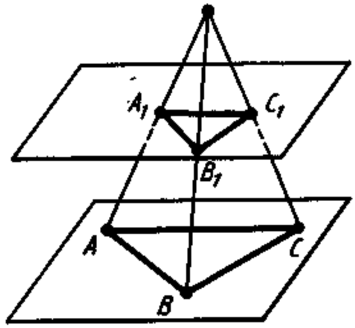


Рис. 37

26. Через данную точку проведите плоскость, параллельную каждой из двух пересекающихся прямых. Всегда ли это возможно?

27. Параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат в различных плоскостях. Докажите, что четырехугольник CDD_1C_1 также параллелограмм (рис. 36).

28. Через вершины параллелограмма $ABCD$, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие другую плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ также параллелограмм.

29. Через вершины треугольника ABC, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие другую плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

30. Три прямые, проходящие через одну точку, пересекают данную плоскость в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 37).

31. Докажите, что если четыре прямые, проходящие через точку A, пересекают плоскость α в вершинах параллелограмма, то они пересекают любую плоскость, параллельную α и не проходящую через точку A, также в вершинах параллелограмма (рис. 38).

32. Даны две параллельные плоскости. Через точки A и B одной из плоскостей проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1 и B_1. Чему равен отрезок A_1B_1, если $AB=a$?

33* Даны две параллельные плоскости α_1, α_2 и точка A, не лежащая ни в одной из этих плоскостей. Через точку A

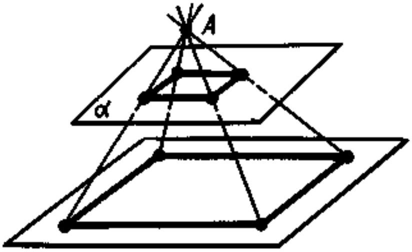


Рис. 38

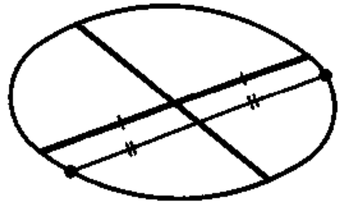


Рис. 39

проведена произвольная прямая. Пусть X_1 и X_2 — точки пересечения ее с плоскостями α_1 и α_2. Докажите, что отношение длин отрезков $AX_1 : AX_2$ не зависит от взятой прямой.

34* Точка A лежит вне плоскости α, X — произвольная точка плоскости α, X' — точка отрезка AX, делящая его в отношении $m : n$. Докажите, что геометрическим местом точек X' является плоскость, параллельная плоскости α.

35* Даны три параллельные плоскости: α_1, α_2, α_3. Пусть X_1, X_2, X_3 — точки пересечения данных плоскостей с произвольной прямой. Докажите, что отношение длин отрезков $X_1X_2 : X_2X_3$ не зависит от прямой, то есть одинаковое для любых двух прямых.

36. Даны четыре параллельные прямые. Докажите, что если какая-нибудь плоскость пересекает эти прямые в вершинах параллелограмма, то любая плоскость, не параллельная данным прямым, пересекает их в вершинах некоторого параллелограмма.

37. Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции медиан этого треугольника?

38. Дана параллельная проекция треугольника. Что является проекцией средней линии треугольника?

39. Может ли при параллельном проектировании параллелограмма получиться трапеция? Ответ объясните.

40. Может ли проекция параллелограмма при параллельном проектировании быть квадратом?

41. Докажите, что параллельная проекция центрально-симметричной фигуры также является центрально-симметричной фигурой.

42* Дана параллельная проекция окружности и ее диаметра (рис. 39). Как построить проекцию перпендикулярного диаметра?

§ 3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

14. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

Как и на плоскости, две прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

Теорема 3.1. ***Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они также перпендикулярны.***

Доказательство. Пусть a и b — перпендикулярные прямые, a_1 и b_1 — параллельные им пересекающиеся прямые. Докажем, что прямые a_1 и b_1 перпендикулярны.

Если прямые a, b, a_1, b_1 лежат в одной плоскости, то они имеют указанное в теореме свойство, которое известно из планиметрии.

Допустим теперь, что наши прямые не лежат в одной плоскости. Тогда прямые a и b лежат в некоторой плоскости α, а прямые a_1 и b_1 — в какой-то плоскости α_1 (рис. 40). По теореме 2.4 плоскости α и α_1 параллельны. Пусть C — точка пересечения прямых a и b, а C_1 — точка пересечения прямых a_1 и b_1. Проведем в плоскости параллельных прямых a и a_1 прямую, параллельную прямой CC_1. Она пересечет прямые a и a_1 в точках A и A_1. В плоскости прямых b и b_1 проведем прямую, параллельную прямой CC_1, и обозначим через B и B_1 точки ее пересечения с прямыми b и b_1.

Четырехугольники CAA_1C_1 и CBB_1C_1 — параллелограммы, так как у них противолежащие стороны параллельны. Четырехугольник ABB_1A_1 — также параллелограмм. У него стороны AA_1, BB_1 параллельны, потому что каждая из них парал-

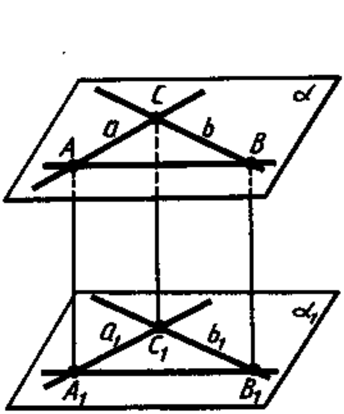


Рис. 40

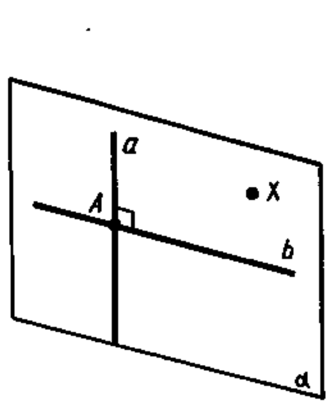


Рис. 41

лельна прямой CC_1. Таким образом, четырехугольник лежит в плоскости, проходящей через параллельные прямые AA_1 и BB_1. А она пересекает параллельные плоскости α и α_1 по параллельным прямым AB и A_1B_1.

Так как у параллелограмма противолежащие стороны равны, то $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$. По третьему признаку равенства треугольников треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Итак, угол $A_1C_1B_1$, равный углу ACB, прямой, то есть прямые a_1 и b_1 перпендикулярны. Теорема доказана.

Задача (1). Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

Решение. Пусть a — данная прямая и A — точка на ней (рис. 41). Возьмем вне прямой a какую-нибудь точку X и проведем через эту точку и прямую a плоскость α (теорема 1.1). В плоскости α через точку A можно провести прямую b, перпендикулярную прямой a.

15. ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной* этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через точку пересечения (рис. 42).

Теорема 3.2. ***Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.***

Доказательство. Пусть a — прямая, перпендикулярная прямым b и c в плоскости α.

Тогда прямая a проходит через точку A пересечения прямых b и c (рис. 43). Докажем, что прямая a перпендикулярна плоскости α.

Проведем произвольную прямую x через точку A в плоскости α и покажем, что она перпендикулярна прямой a. Проведем в плоскости α произвольную прямую, которая не проходит через точку A и пересекает прямые b, c и x. Пусть точками пересечения будут B, C и X.

Отложим на прямой a от точки A в разные стороны равные отрезки: AA_1 и AA_2. Треугольник A_1CA_2 равнобедренный, поскольку отрезок AC является высотой по условию теоремы и медианой — по построению ($AA_1=AA_2$). По той же причине треугольник A_1BA_2 также равнобедренный. Следовательно, треугольники A_1BC и A_2BC равны по третьему признаку равенства треугольников.

Из равенства треугольников A_1BC и A_2BC следует равенство углов A_1BX, A_2BX и, значит, равенство треугольников A_1BX и

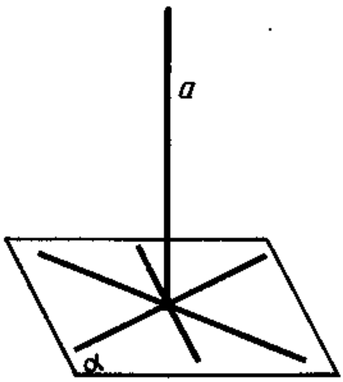


Рис. 42

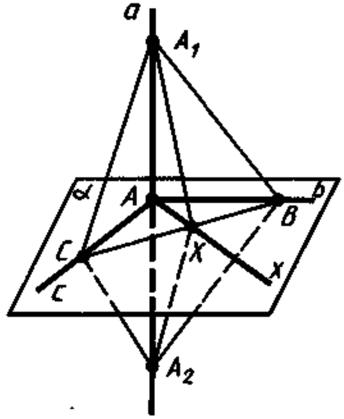


Рис. 43

A_2BX по первому признаку равенства треугольников. Из равенства сторон A_1X и A_2X этих треугольников делаем заключение, что треугольник A_1XA_2 равнобедренный. Поэтому его медиана XA является также высотой. А это значит, что прямая x перпендикулярна a. По определению прямая a перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.

16. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Задача (9). Докажите, что через данную точку прямой можно провести одну и только одну перпендикулярную ей плоскость.

Решение. Пусть a — данная прямая и A — точка на ней (рис. 44). Проведем через нее две плоскости, а в них — через точку A прямые b и c, перпендикулярные прямой a. Плоскость α, проходящая через эти прямые, перпендикулярна прямой a по теореме 3.2.

Докажем, что эта плоскость единственная. Допустим, что кроме плоскости α существует другая плоскость α', проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a (рис. 45). Пусть B — точка плоскости α', не лежащая в плоскости α. Проведем через точку B и прямую a плоскость. Она пересечет плоскости α и α' по разным прямым b и b', перпендикулярным прямой a. А это, как мы знаем, невозможно, поскольку на плоскости через данную точку прямой проходит только одна перпендикулярная ей пря-

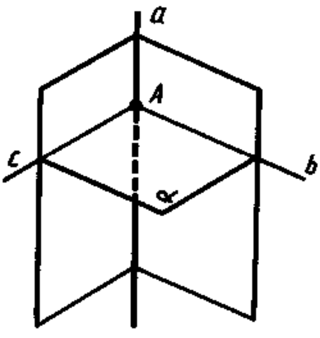


Рис. 44

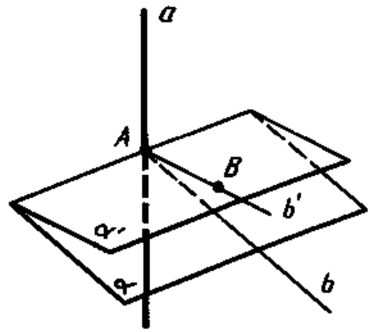


Рис. 45

мая. Следовательно, плоскость, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a, единственная.

Задача (11). Докажите, что через данную точку плоскости можно провести одну и только одну перпендикулярную ей прямую.

Решение. Пусть α — данная плоскость и A — точка на ней (рис. 46). Проведем в плоскости α через точку A две прямые b и c. Проведем через точку A перпендикулярные им плоскости. Они пересекутся по некоторой прямой a, перпендикулярной прямым b и c. Следовательно, прямая a перпендикулярна плоскости α.

Докажем, что эта прямая единственная. Допустим, что кроме прямой a существует другая прямая a', проходящая через точку A и перпендикулярная плоскости α (рис. 47). Проведем через прямые a и a' плоскость. Она пересечет

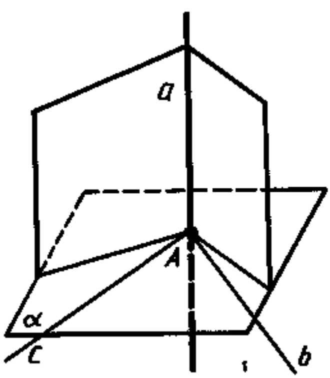


Рис. 46

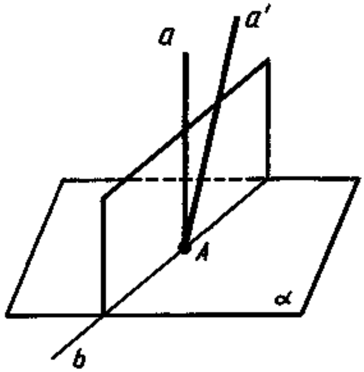


Рис. 47

плоскость α по некоторой прямой b, перпендикулярной прямым a и a'. А это невозможно. Следовательно, прямая, проходящая через данную точку плоскости и перпендикулярная этой плоскости, единственная.

17. СВОЙСТВА ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ МЕЖДУ СОБОЙ

Теорема 3.3. ***Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.***

Доказательство. Пусть a_1 и a_2 — две параллельные прямые и α — плоскость, перпендикулярная прямой a_1 (рис. 48). Докажем, что эта плоскость перпендикулярна и прямой a_2.

Проведем через точку A_2 пересечения прямой a_2 с плоскостью α произвольную прямую x_2 в плоскости α. Проведем в плоскости α через точку A_1 пересечения прямой a_1 с α прямую x_1, параллельную прямой x_2. Поскольку прямая a_1 перпендикулярна плоскости α, то прямые a_1 и x_1 перпендикулярны. А по теореме 3.1 параллельные им пересекающиеся прямые a_2 и x_2 также перпендикулярны. Таким образом, прямая a_2 перпендикулярна любой прямой x_2 в плоскости α. А это значит, что прямая a_2 перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.

Задача (12). Докажите, что через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости α.

Решение. Проведем в плоскости α две пересекающиеся прямые b и c (рис. 49). Через точку их пересечения проведем плоскости β и γ, перпендикулярные прямым b и c соответственно. Пересечением их будет прямая a. Прямая a

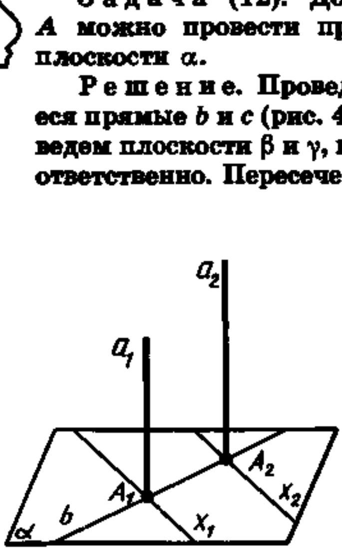


Рис. 48

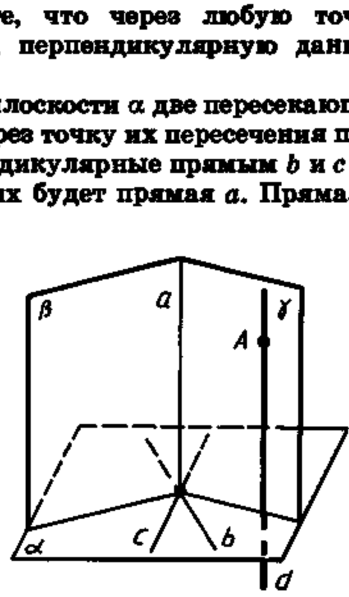


Рис. 49

перпендикулярна прямым b и c, следовательно, и плоскости α. Проведем теперь через точку A прямую d, параллельную a. По теореме 3.3 она перпендикулярна плоскости α.

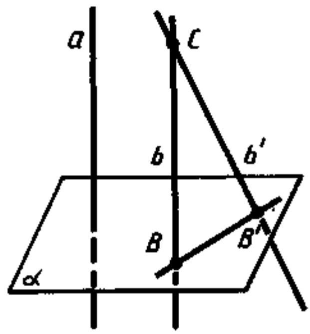


Рис. 50

Теорема 3.4. ***Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.***

Доказательство. Пусть a и b — две прямые, перпендикулярные плоскости α (рис. 50). Допустим, что прямые a и b не параллельны. Выберем на прямой b точку C, не лежащую на плоскости α. Проведем через точку C прямую b', параллельную прямой a. Прямая b' перпендикулярна плоскости α (теорема 3.3). Пусть B и B' — точки пересечения прямых b и b' с плоскостью α. Тогда прямая BB' перпендикулярна пересекающимся прямым b и b'. А это невозможно. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

18. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Пусть даны плоскость и не лежащая на ней точка.

Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра*. *Расстоянием* от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной*. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной*.

На рисунке 51 из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AB и наклонная AC. Точка B — основание перпендикуляра, точка C — основание наклонной, BC — проекция наклонной AC на плоскость α.

Задача (26). Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

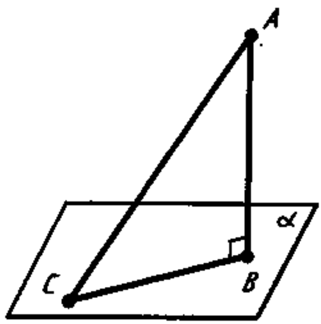


Рис. 51

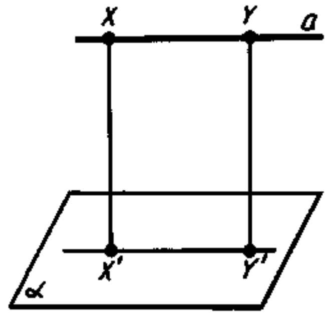


Рис. 52

Решение. Пусть a — данная прямая и α — данная плоскость (рис. 52). Возьмем на прямой a две произвольные точки X и Y. Их расстояния до плоскости α — это длины перпендикуляров XX' и YY', опущенных на эту плоскость. По теореме 3.4 прямые XX' и YY' параллельны, следовательно, лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскость α по прямой $X'Y'$. Прямая a параллельна прямой $X'Y'$, так как не пересекает содержащую ее плоскость α. Итак, в четырехугольнике $XX'Y'Y$ противолежащие стороны параллельны. Следовательно, он параллелограмм, а это значит, что $XX'=YY'$.

Расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости называется расстояние от любой точки этой прямой до плоскости.

Точно так же, как и при решении задачи 26, доказывают, что расстояния от любых двух точек плоскости до параллельной плоскости равны. В связи с этим *расстоянием* между параллельными плоскостями называется расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости.

19. ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Теорема 3.5. *Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна наклонной.* И обратно: *если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.*

Доказательство. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости α, AC — наклонная и c — прямая в плоскости α, проходящая через основание C наклонной (рис. 53). Проведем прямую CA', параллельную прямой AB. Она перпендикулярна

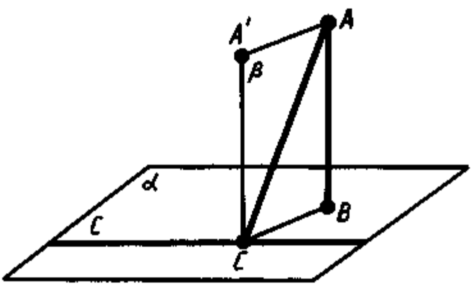


Рис. 53

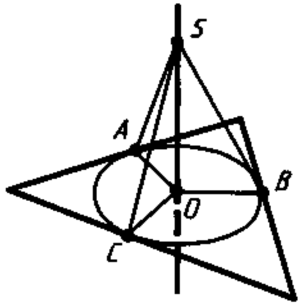


Рис. 54

плоскости α. Проведем через прямые AB и $A'C$ плоскость β. Прямая c перпендикулярна прямой CA'. Если она перпендикулярна прямой CB, то она перпендикулярна и плоскости β, а значит, и прямой AC.

Аналогично, если прямая c перпендикулярна наклонной CA, то она, как перпендикуляр и к прямой CA', перпендикулярна плоскости β, а следовательно, и проекции наклонной BC. Теорема доказана.

З а д а ч а (45). Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть A, B, C — точки касания сторон треугольника с окружностью, O — центр окружности и S — точка на перпендикуляре (рис. 54). Так как радиус OA перпендикулярен стороне треугольника, то по теореме о трех перпендикулярах отрезок SA является перпендикуляром к этой стороне, а его длина — расстояние от точки S до стороны треугольника. По теореме Пифагора, $SA=\sqrt{AO^2+OS^2}=$ $=\sqrt{r^2+OS^2}$, где r — радиус вписанной окружности. Аналогично находим $SB=\sqrt{r^2+OS^2}$, $SC=\sqrt{r^2+OS^2}$, то есть все расстояния от точки S до сторон треугольника равны.

20. ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными*, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

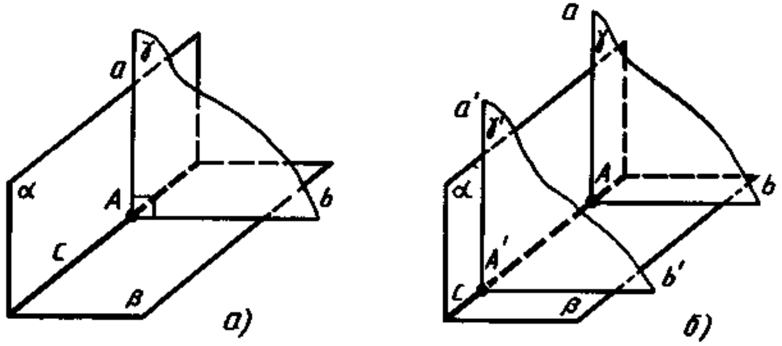


Рис. 55

На рисунке 55, *а* вы видите две перпендикулярные плоскости α и β, пересекающиеся по прямой c. Плоскость γ, перпендикулярная прямой c, пересекает плоскости α и β по перпендикулярным прямым a и b.

Любая плоскость, перпендикулярная линии пересечения перпендикулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

Действительно, если взять другую плоскость γ', перпендикулярную прямой c, то она пересечет плоскость α по прямой a', перпендикулярной c, а значит, параллельной прямой a, а плоскость β — по прямой b', перпендикулярной c, следовательно, параллельной прямой b (рис. 55, *б*). По теореме 3.1 из перпендикулярности прямых a и b следует перпендикулярность прямых a' и b', что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 3.6. ***Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть α — плоскость, b — прямая, перпендикулярная этой плоскости, β — плоскость, проходящая через прямую b, и c — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 56). Докажем, что плоскости α и β перпендикулярны.

Проведем в плоскости α через точку пересечения прямой b с плоскостью α прямую a, перпендикулярную прямой c. Проведем через прямые a и b плоскость γ. Она перпендикулярна прямой c, так как прямая c перпендикулярна прямым a и b. Поскольку прямые a и b перпендикулярны, то плоскости α и β также перпендикулярны. Теорема доказана.

З а д а ч а (54). Даны прямая a и плоскость α. Проведите через прямую a плоскость, перпендикулярную плоскости α.

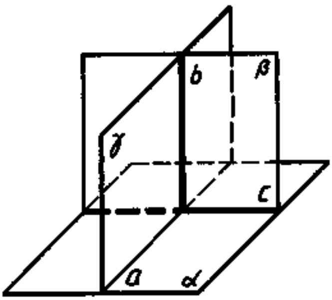


Рис. 56

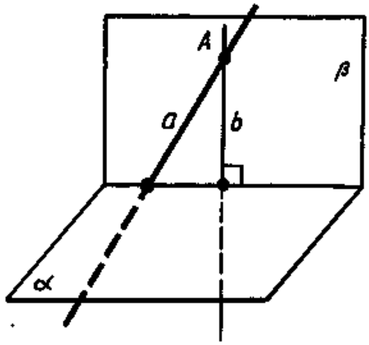


Рис. 57

Р е ш е н и е. Через произвольную точку прямой a проводим прямую b (рис. 57), перпендикулярную плоскости α (задача 12). Через прямые a и b проводим плоскость β. Плоскость β перпендикулярна плоскости α по теореме 3.6.

21. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный каждой из них.

Докажем, что ***две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр и к тому же только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.***

Действительно, пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые (рис. 58). Проведем через них параллельные плоскости α и β. Прямые, пересекающие прямую a и перпендикулярные плоскости α, лежат в одной плоскости (γ). Эта плоскость пересекает плоскость β по прямой a', параллельной a. Пусть B — точка пересечения прямых a' и b. Тогда прямая AB, перпендикулярная плоскости α, перпендикулярна и плоскости β, так как β параллельна α. Отрезок AB — общий перпендикуляр плоскостей α и β, а значит, и прямых a и b.

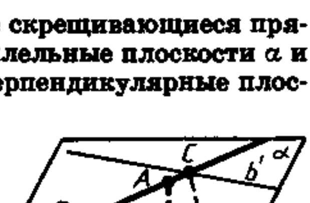


Рис. 58

Докажем, что этот общий перпендикуляр единственный. Допустим, что прямые a и b имеют другой общий перпендикуляр CD. Проведем через точку C прямую b', параллельную b. Прямая CD перпендикулярна прямой b, а следовательно, и b'. Так как она перпендикулярна прямой a, то она перпендикулярна плоскости α, то есть параллельна прямой AB. Выходит, что через прямые AB и CD, как через параллельные, можно провести плоскость. В этой плоскости будут лежать наши скрещивающиеся прямые AC и BD, а это невозможно, что и надо было доказать.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. Она равна расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

22. ПРИМЕНЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ В ТЕХНИЧЕСКОМ ЧЕРЧЕНИИ

В черчении применяется ортогональное проектирование, то есть параллельное проектирование прямыми, перпендикулярными плоскости проекции. Чертежи деталей машин получаем ортогональным проектированием на одну, две или три взаимно перпендикулярные плоскости. Эти плоскости называются плоскостями проекций.

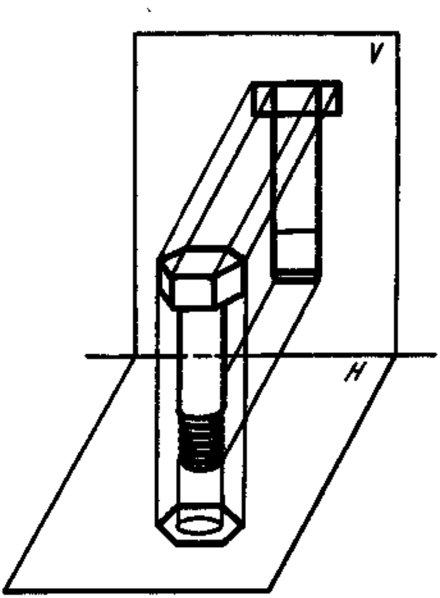


Рис. 59

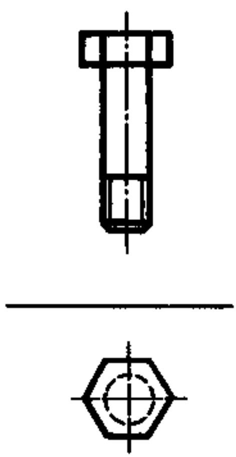


Рис. 60

На рисунке 59 показано проектирование болта на две плоскости: на горизонтальную H и вертикальную V. Чертеж болта в двух проекциях показан на рисунке 60.

При выполнении чертежей деталей машин используют различные условности, предусмотренные стандартом. В частности, резьба условно изображается сплошной тонкой линией, а центровые и осевые — штрихпунктирными линиями. Эти условности изображений применены на чертеже болта (рис. 60).

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
2. Докажите, что пересекающиеся прямые, соответственно параллельные перпендикулярным прямым, перпендикулярны.
3. Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Докажите признак перпендикулярности прямой и плоскости.
5. Докажите, что если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой.
6. Докажите, что две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.
7. Что такое перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость?
8. Что называется расстоянием от точки до плоскости?
9. Что такое наклонная, проведенная из данной точки к плоскости? Что такое проекция наклонной?
10. Докажите теорему о трех перпендикулярах.
11. Какие плоскости называются перпендикулярными?
12. Докажите признак перпендикулярности плоскостей.
13. Что такое общий перпендикуляр скрещивающихся прямых?
14. Докажите, что скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.
15. Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.
2. Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести две различные перпендикулярные ей прямые.

3. Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны (рис. 61). Найдите отрезок CD, если: 1) $AB=3$ см, $BC=7$ см, $AD=1{,}5$ см; 2) $BD=9$ см, $BC=16$ см, $AD=5$ см; 3) $AB=b$, $BC=a$, $AD=d$; 4) $BD=c$, $BC=a$, $AD=d$.
4* Стороны четырехугольника $ABCD$ и прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ соответственно параллельны. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.
5. Докажите, что через точку, не принадлежащую данной плоскости, нельзя провести больше чем одну прямую, перпендикулярную плоскости.
6. Через центр описанной около треугольника окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от вершин треугольника (рис. 62).
7. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная его плоскости. Расстояния от точки K до других вершин прямоугольника равны 6 м, 7 м и 9 м. Найдите отрезок AK.
8. Через вершину острого угла прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояния от точки D до вершин B и C, если $AC=a$, $BC=b$, $AD=c$.
9. Докажите, что через данную точку прямой можно провести одну и только одну перпендикулярную ей плоскость.
10. Через точку A прямой a проведены перпендикулярные ей плоскость β и прямая b. Докажите, что прямая b лежит в плоскости β.
11. Докажите, что через данную точку плоскости можно провести одну и только одну перпендикулярную ей прямую.

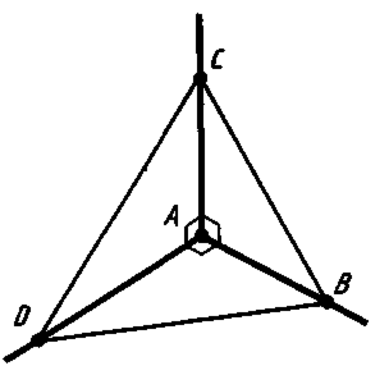


Рис. 61

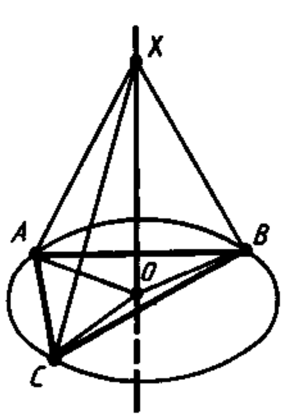


Рис. 62

12. Докажите, что через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости α.

13. Через вершину квадрата $ABCD$ проведена прямая BM, перпендикулярная его плоскости. Докажите, что: 1) прямая AD перпендикулярна плоскости прямых AB и BM; 2) прямая CD перпендикулярна плоскости прямых BC и BM.

14. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α, пересекающие ее в точках C и D. Найдите расстояние между точками A и B, если $AC=3$ м, $BD=2$ м, $CD=2{,}4$ м и отрезок AB не пересекает плоскость α.

15. Верхние концы двух вертикальных столбов, находящихся на расстоянии 3,4 м друг от друга, соединены перекладиной. Высота одного столба 5,8 м, а другого 3,9 м. Найдите длину перекладины.

16. Телефонный провод длиной 15 м протянут от телефонного столба, где он прикреплен на высоте 8 м от поверхности земли, к дому, где его прикрепили на высоте 20 м. Найдите расстояние между домом и столбом, считая, что провод не провисает.

17. Точка A находится на расстоянии a от вершин равностороннего треугольника со стороной a. Найдите расстояние от точки A до плоскости треугольника.

18. Из точки S вне плоскости α проведены к ней три различные наклонные SA, SB, SC и перпендикуляр SO. Докажите, что основание перпендикуляра O является центром окружности, описанной около треугольника ABC.

19. Стороны равностороннего треугольника равны 3 м. Найдите расстояние до плоскости этого треугольника от точки, удаленной от каждой из его вершин на 2 м.

20* В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4 м. Данная точка находится на расстоянии 6 м от плоскости треугольника и на одинаковом расстоянии от его вершин. Найдите это расстояние.

21. Расстояния от точки A до вершин квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если сторона квадрата равна b.

22. Найдите геометрическое место оснований наклонных данной длины, проведенных из данной точки к плоскости.

23. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см. Разность проекций этих наклонных составляет 9 см. Найдите проекции наклонных.

24. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если: 1) одна из них на 26 см больше другой, а проекции наклонных равны 12 см и 40 см; 2) наклонные относятся как $1:2$, а проекции наклонных равны 1 см и 7 см.

25. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 23 см и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 2:3.

26. Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

27. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость, параллельная гипотенузе, на расстоянии 1 м от нее. Проекции катетов на эту плоскость равны 3 м и 5 м. Найдите гипотенузу.

28. Через одну сторону ромба проведена плоскость на расстоянии 4 м от противолежащей стороны. Проекции диагоналей на эту плоскость равны 8 м и 2 м. Найдите проекции сторон.

29. Из концов отрезка AB, параллельного плоскости, проведены перпендикуляр AC и наклонная BD, перпендикулярная отрезку AB (рис. 63). Чему равно расстояние CD, если $AB=a$, $AC=b$, $BD=c$?

30. Докажите, что расстояния от всех точек плоскости до параллельной плоскости одинаковы.

31. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно a. Отрезок длиной b своими концами упирается в эти плоскости. Найдите проекцию отрезка на каждую из плоскостей.

32. Два отрезка длин a и b упираются концами в две параллельные плоскости. Проекция первого отрезка (длины a) на плоскость равна c. Найдите проекцию второго отрезка.

33. Концы данного отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от нее на 0,3 м и 0,5 м. Как удалена от плоскости точка, делящая данный отрезок в отношении 3:7?

34. Через середину отрезка проведена плоскость. Докажите, что концы отрезка находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.

35. Через диагональ параллелограмма проведена плоскость. Докажите, что концы другой диагонали находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.

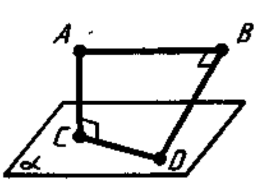


Рис. 63

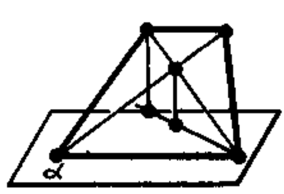


Рис. 64

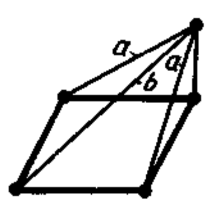


Рис. 65

36. Найдите расстояние от середины отрезка AB до плоскости, не пересекающей этот отрезок, если расстояния от точек A и B до плоскости равны: 1) 3,2 см и 5,3 см; 2) 7,4 см и 6,1 см; 3) a и b.

37*. Решите предыдущую задачу, считая, что отрезок AB пересекает плоскость.

38. Концы отрезка длиной 1 м удалены от плоскости, которую он пересекает, на 0,5 м и 0,3 м. Найдите длину проекции отрезка на плоскость.

39*. Через основание трапеции проведена плоскость на расстоянии a от другого основания. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до этой плоскости, если основания трапеции относятся как $m:n$ (рис. 64).

40. Через сторону параллелограмма проведена плоскость на расстоянии a от противолежащей стороны. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до этой плоскости.

41. Из вершины квадрата проведен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин квадрата равны a и b $(a<b)$. Найдите длину перпендикуляра и сторону квадрата (рис. 65).

42. Из вершины прямоугольника проведен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин прямоугольника равны a, b, c $(a<c,\ b<c)$. Найдите длину перпендикуляра и стороны прямоугольника.

43. Из данной точки к плоскости проведены две равные наклонные длиной 2 м. Найдите расстояние от точки до плоскости, если наклонные образуют между собой угол 60°, а их проекции перпендикулярны.

44. Из точки, находящейся от плоскости на расстоянии 1 м, проведены две равные наклонные. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если известно, что наклонные перпендикулярны и образуют с перпендикуляром к плоскости углы равные 60°.

45. Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

46. К плоскости треугольника из центра вписанной в него окружности радиуса 0,7 м проведен перпендикуляр длиной 2,4 м. Найдите расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.

47. Расстояние от данной точки до плоскости треугольника равно 1,1 м, а до каждой из его сторон 6,1 м. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

48. Из вершины равностороннего треугольника ABC проведен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны BC, если $AD=13$ см, $BC=6$ см.

49. Через конец A отрезка AB длиной b проведена плоскость, перпендикулярная отрезку, и в этой плоскости проведена прямая. Найдите расстояние от точки B до прямой, если расстояние от точки A до прямой равно a.

50. Расстояния от точки A до всех сторон квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если диагональ квадрата равна d.

51* Точка M, лежащая вне плоскости данного прямого угла, отстоит от вершины угла на расстояние a, а от его сторон на расстояние b. Найдите расстояние от точки M до плоскости угла.

52* Дан равнобедренный треугольник с основанием 6 м и боковой стороной 5 м. Из центра вписанного в него круга проведен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 2 м. Найдите расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.

53. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведен перпендикуляр CD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы треугольника, если $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$.

54. Даны прямая a и плоскость α. Проведите через прямую a плоскость, перпендикулярную плоскости α.

55. Даны прямая a и плоскость α. Докажите, что все прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости, перпендикулярной плоскости α.

56. Из вершин A и B равностороннего треугольника ABC проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости треугольника. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, если $AB=2$ м, $CA_1=3$ м, $CB_1=7$ м и отрезок A_1B_1 не пересекает плоскость треугольника.

57. Из вершин A и B острых углов прямоугольного треугольника ABC проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости треугольника. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, если $A_1C=4$ м, $A_1A=3$ м, $B_1C=6$ м, $B_1B=2$ м и отрезок A_1B_1 не пересекает плоскость треугольника.

58* Докажите, что если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна их линии пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.

59. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если: 1) $AC=6$ м, $BD=7$ м, $CD=6$ м; 2) $AC=3$ м, $BD=4$ м,

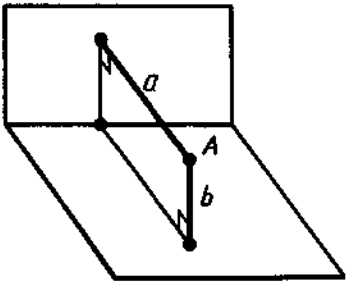


Рис. 66

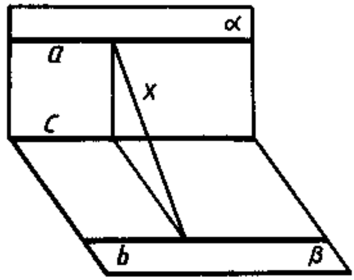


Рис. 67

$CD=12$ м; 3) $AD=4$ м, $BC=7$ м, $CD=1$ м; 4) $AD=BC=5$ м, $CD=1$ м; 5) $AC=a$, $BD=b$, $CD=c$; 6) $AD=a$, $BC=b$, $CD=c$.

60. Точка находится на расстояниях a и b от двух перпендикулярных плоскостей. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей (рис. 66).

61. Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A, расстояние от которой до прямой c (линии пересечения плоскостей) равно 0,5 м. В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой c и отстоящая от нее на 1,2 м. Найдите расстояние от точки A до прямой b.

62. Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c. В плоскости α проведена прямая $a \parallel c$, а в плоскости β — прямая $b \parallel c$. Найдите расстояние между прямыми a и b, если расстояние между прямыми a и c равно 1,5 м, а между прямыми b и c — 0,8 м (рис. 67).

§ 4. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

23. ВВЕДЕНИЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Возьмем три взаимно перпендикулярные прямые x, y, z, пересекающиеся в одной точке O (рис. 68). Проведем через каждую пару этих прямых плоскость. Плоскость, проходящая через прямые x и y, называется плоскостью xy. Две другие плоскости называются соответственно xz и yz. Прямые x, y, z называются *координатными осями* (или *осями координат*), точка их пересечения O — *началом координат*, а плоскости xy, yz, xz — *координатными плоскостями*. Точка O разбивает каждую из осей координат на две полупрямые — полуоси. Договоримся одну из них называть положительной, а другую — отрицательной.

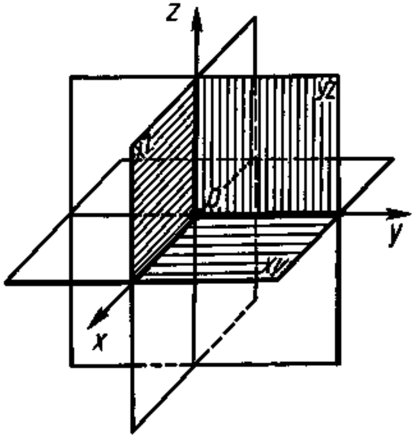


Рис. 68

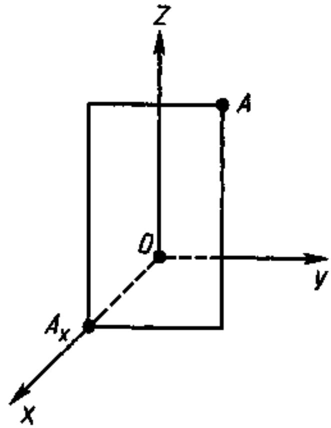


Рис. 69

Возьмем теперь произвольную точку A и проведем через нее плоскость, параллельную плоскости yz (рис. 69). Она пересечет ось x в некоторой точке A_x. *Координатой* x точки A называется число, равное по абсолютной величине длине отрезка OA_x: положительное, если точка A_x лежит на положительной полуоси x, и отрицательное, если она лежит на отрицательной полуоси. Если точка A_x совпадает с точкой O, то считаем, что $x=0$. Аналогично определяем координаты y и z точки A. Координаты точки будем записывать в скобках рядом с буквенным обозначением точки: $A(x;\ y;\ z)$. Иногда будем обозначать точку просто ее координатами $(x;\ y;\ z)$.

Задача (2). Даны точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(0;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 0;\ 3)$, $D(1;\ 2;\ 0)$. Какие из этих точек лежат: 1) в плоскости xy; 2) на оси z; 3) в плоскости yz?

Решение. Точки плоскости xy имеют координату z, равную нулю. Поэтому только точка D лежит в плоскости xy. Точки плоскости yz имеют координату x, равную нулю. Следовательно, точки B и C лежат в плоскости yz. Точки на оси z имеют две координаты (x и y), равные нулю. Поэтому только точка C лежит на оси z.

24. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

Выразим расстояние между двумя точками $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ через координаты этих точек.

Рассмотрим сначала случай, когда прямая A_1A_2 не параллельна оси z (рис. 70). Проведем через точки A_1 и A_2 прямые, параллельные оси z. Они пересекут плоскость xy в точках A_1'

и A_2'. Эти точки имеют те же координаты x, y, что и точки A_1 и A_2, а координата z у них равна нулю. Проведем теперь плоскость через точку A_2, параллельную плоскости xy. Она пересечет прямую A_1A_1' в некоторой точке C. По теореме Пифагора

$$A_1A_2^2 = A_1C^2 + CA_2^2.$$

Отрезок CA_2 равен отрезку $A_1'A_2'$, а

$$A_1'A_2'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Длина отрезка A_1C равна $|z_1 - z_2|$. Поэтому

$$A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

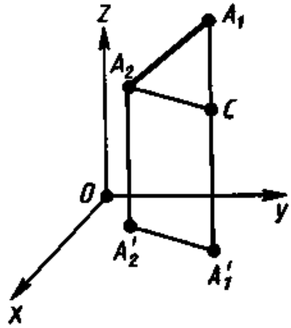


Рис. 70

Если отрезок A_1A_2 параллелен оси z, то $A_1A_2 = |z_1 - z_2|$. Такой же результат дает и найденная формула, так как в этом случае $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Таким образом, ***расстояние между точками A_1 и A_2 находят по формуле:***

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Задача (5). Найдите в плоскости xy точку $D\,(x;\ y;\ 0)$, равноудаленную от трех точек: $A\,(0;\ 1;\ -1)$, $B\,(-1;\ 0;\ 1)$, $C\,(0;\ -1;\ 0)$.

Решение. Имеем:

$$AD^2 = (x-0)^2 + (y-1)^2 + (0+1)^2,$$
$$BD^2 = (x+1)^2 + (y-0)^2 + (0-1)^2,$$
$$CD^2 = (x-0)^2 + (y+1)^2 + (0-0)^2.$$

Приравняв первые два расстояния третьему, получим два уравнения для определения x и y:

$$-4y + 1 = 0, 2x - 2y + 1 = 0.$$

Отсюда $y = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. Искомая точка $D\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ 0\right)$.

25. КООРДИНАТЫ СЕРЕДИНЫ ОТРЕЗКА

Пусть $A_1\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $A_2\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — две произвольные точки. Выразим координаты x, y, z середины C отрезка A_1A_2 через координаты его концов A_1 и A_2 (рис. 71). Для этого проведем через точки A_1, A_2 и C прямые, параллельные оси z. Они пересекут плоскость xy в точках $A_1'\,(x_1;\ y_1;\ 0)$, $A_2'(x_2;\ y_2;\ 0)$ и $C'(x;\ y;\ 0)$. По теореме Фалеса точка C' является серединой отрезка

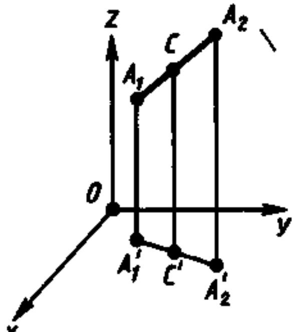


Рис. 71

$A_1'A_2'$. А мы знаем, что на плоскости xy координаты середины отрезка выражаются через координаты его концов по формулам:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Чтобы найти формулу для z, достаточно вместо плоскости xy взять плоскость xz или yz. При этом для z получим аналогичную формулу:

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Задача (9). Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ 4)$, $C(1;\ 1;\ 4)$, $D(2;\ 2;\ 2)$ — параллелограмм.

Решение. Мы знаем, что четырехугольник, диагонали которого пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, является параллелограммом. Воспользуемся этим для решения задачи. Координаты середины отрезка AC:

$$x=\frac{1+1}{2}=1,\ y=\frac{3+1}{2}=2,\ z=\frac{2+4}{2}=3.$$

Координаты середины отрезка BD:

$$x=\frac{0+2}{2}=1,\ y=\frac{2+2}{2}=2,\ z=\frac{4+2}{2}=3.$$

Видим, что координаты середин отрезков AC и BD одинаковы. Значит, эти отрезки пересекаются и в точке пересечения делятся пополам. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

26. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Понятие преобразования для фигур в пространстве определяют так же, как и на плоскости. Как и на плоскости, определяют преобразования симметрии относительно точки и прямой.

Кроме симметрий относительно точки и прямой в пространстве, рассматривают преобразование симметрии относительно плоскости (рис. 72). Пусть α — произвольная фиксированная плоскость. Из точки X фигуры опускаем перпендикуляр XA

на плоскость α и на его продолжении за точку A откладываем отрезок AX', равный XA. Точка X' называется *симметричной* точке X относительно плоскости α, а преобразование, переводящее точку X в симметричную ей точку X', называется *преобразованием симметрии относительно плоскости* α.

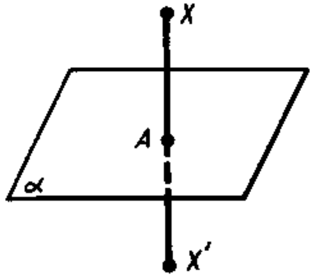


Рис. 72

Если точка X лежит в плоскости α, то считают, что точка X переходит в себя. Если преобразование симметрии относительно плоскости α переводит фигуру в себя, то фигура называется *симметричной относительно плоскости* α, а плоскость α называется *плоскостью симметрии* этой фигуры.

Задача (17). Даны точки (1; 2; 3), (0; −1; 2), (1; 0; −3). Найдите точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.

Решение. Точка, симметричная точке (1; 2; 3) относительно плоскости xy, лежит на прямой, перпендикулярной плоскости xy. Поэтому она имеет те же координаты x и y: $x=1$, $y=2$. Симметричная точка находится на таком же расстоянии от плоскости xy, но с другой стороны от нее. Поэтому координата z у нее отличается только знаком, то есть $z=-3$. Итак, точкой, симметричной точке (1; 2; 3) относительно плоскости xy, будет (1; 2; −3). Для других точек и остальных координатных плоскостей решение аналогичное.

27. СИММЕТРИЯ В ПРИРОДЕ И НА ПРАКТИКЕ

Симметрия достаточно распространена в природе. Ее можно наблюдать в форме листьев и цветов растений, в расположении различных органов животных, в форме кристаллических тел (рис. 73).

Симметрия широко применяется на практике, в строительстве, в технике (рис. 74).

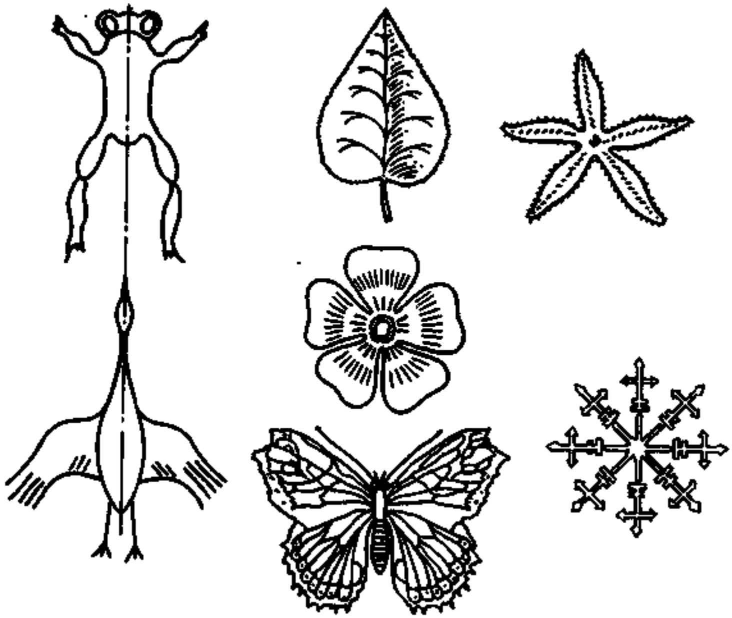


Рис. 73

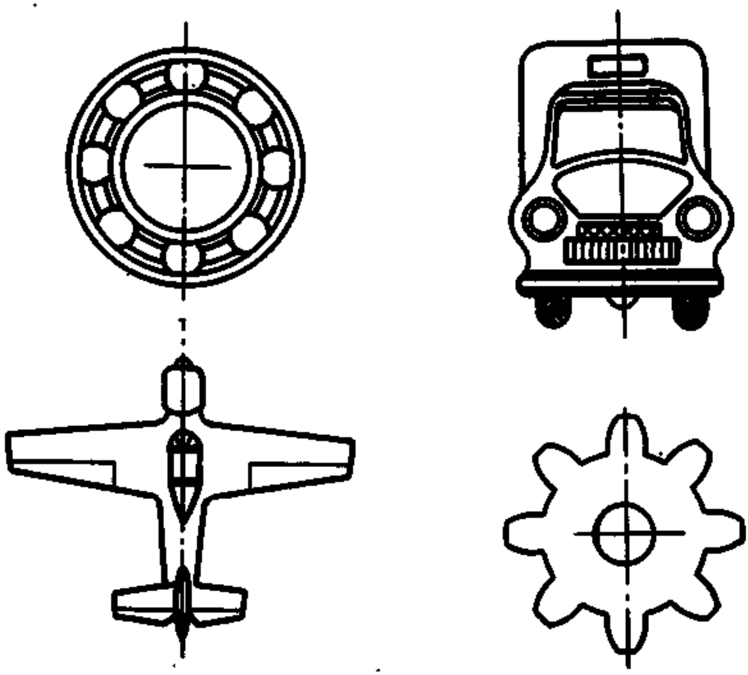


Рис. 74

28. ДВИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Движение в пространстве определяют так же, как и на плоскости. А именно: *движением* называется преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками.

Дословно так же, как и для движения на плоскости, доказывают, что при движении в пространстве прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки и сохраняются углы между полупрямыми.

Новым свойством движения в пространстве является то, что ***движение переводит плоскость в плоскость***.

Докажем это свойство. Пусть α — произвольная плоскость (рис. 75). Обозначим на ней какие-нибудь три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. При движении они перейдут в три точки A', B', C', также не лежащие на одной прямой. Проведем через них плоскость α'.

Докажем, что при рассматриваемом движении плоскость α переходит в плоскость α'.

Пусть X — произвольная точка плоскости α. Проведем через нее в плоскости α какую-нибудь прямую a, пересекающую треугольник ABC в двух точках Y и Z. Прямая a перейдет при движении в некоторую прямую a'. Точки Y и Z прямой a перейдут в точки Y' и Z', принадлежащие треугольнику $A'\,B'\,C'$, а потому и плоскости α'.

Итак, прямая a' лежит в плоскости α'. Точка X при движении переходит в точку X' прямой a', а потому и плоскости α'. Теорема доказана.

В пространстве, так же как и на плоскости, две фигуры называются *равными*, если они совмещаются движением.

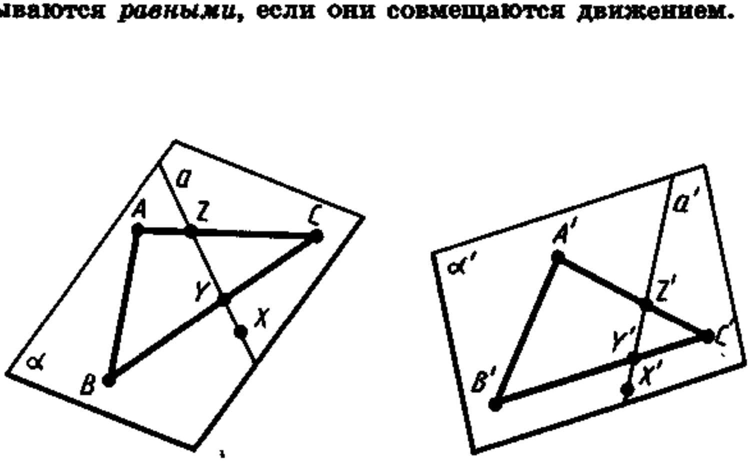


Рис. 75

29. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС В ПРОСТРАНСТВЕ

Параллельным переносом в пространстве называется такое преобразование, при котором произвольная точка $(x;\ y;\ z)$ фигуры переходит в точку $(x+a;\ y+b;\ z+c)$, где числа a, b, c — одни и те же для всех точек $(x;\ y;\ z)$. Параллельный перенос в пространстве задают формулами:

$$x'=x+a, \quad y'=y+b, \quad z'=z+c,$$

выражающими координаты x', y', z' точки, в которую переходит точка $(x;\ y;\ z)$ при параллельном переносе. Так же, как и на плоскости, доказывают такие свойства параллельного переноса:

1. Параллельный перенос — это движение.

2. При параллельном переносе точки смещаются вдоль параллельных прямых (или совпадающих прямых) на одно и то же расстояние.

3. При параллельном переносе каждая прямая переходит в параллельную ей прямую (или в себя).

4. Какие бы ни были точки A и A', существует единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A'.

З а д а ч а (23). Найдите значения a, b, c из формул параллельного переноса $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$, если при этом параллельном переносе точка A $(1;\ 0;\ 2)$ переходит в точку $A'(2;\ 1;\ 0)$.

Р е ш е н и е. Подставив в формулы параллельного переноса координаты точек A и A', то есть $x=1$, $y=0$, $z=2$, $x'=2$, $y'=1$, $z'=0$, получим уравнения, из которых найдем a, b, c: $2=1+a$, $1=0+b$, $0=2+c$. Отсюда $a=1$, $b=1$, $c=-2$.

Новым для параллельного переноса в пространстве является такое свойство:

5. При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит или в себя, или в параллельную ей плоскость.

Действительно, пусть α — произвольная плоскость (рис. 76). Проведем в этой плоскости две пересекающиеся прямые a

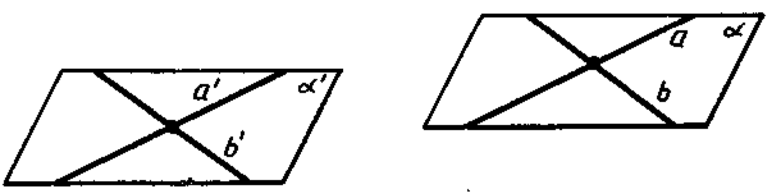


Рис. 76

и b. При параллельном переносе прямые a и b переходят или в себя, или в параллельные прямые a' и b'. Плоскость α переходит в некоторую плоскость α', проходящую через прямые a' и b'. Если плоскость α' не совпадает с α, то по теореме 2.4 она параллельна α, что и требовалось доказать.

30. ПОДОБИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Преобразование подобия в пространстве определяют так же, как и на плоскости. А именно: преобразование фигуры F называется *преобразованием подобия*, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, то есть для двух произвольных точек X и Y фигуры F и точек X' и Y' фигуры F', в которые они переходят, $X'Y' = k \cdot XY$.

Как и на плоскости, преобразование подобия в пространстве переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки и сохраняет углы между полупрямыми. Такими же рассуждениями, как в п. 28, доказывают, что преобразование подобия переводит плоскости в плоскости. Так же, как и на плоскости, две фигуры называются *подобными*, если они переводятся одна в другую преобразованием подобия.

Простейшим преобразованием подобия в пространстве является *гомотетия*. Как и на плоскости, *гомотетия* относительно центра O с коэффициентом гомотетии k — это преобразование, которое переводит произвольную точку X в точку X' луча OX такую, что $OX' = k \cdot OX$.

Преобразование гомотетии в пространстве переводит произвольную плоскость, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость (или в себя, если $k=1$).

Действительно, пусть O — центр гомотетии и α — произвольная плоскость, не проходящая через точку O (рис. 77). Возьмем произвольную прямую AB в плоскости α. Преобразование гомотетии переводит точку A в точку A' на луче OA, а точку B в точку B' на луче OB, причем $\frac{OA'}{OA} = k$, $\frac{OB'}{OB} = k$, где k — коэффициент гомотетии. Отсюда следует подобие треугольников AOB и $A'OB'$. Из подобия треугольников имеем равенство соответственных углов OAB и $OA'B'$, а следовательно, параллельность прямых AB и $A'B'$.

Рис. 77

Возьмем теперь другую прямую AC в плоскости α. Она при гомотетии перейдет в параллельную прямую

$A'C'$. При рассматриваемой гомотетии плоскость α перейдет в плоскость α', проходящую через прямые $A'B'$ и $A'C'$. Так как $A'B' \parallel AB$ и $A'C' \parallel AC$, то по теореме 2.4 плоскости α и α' параллельны, что и надо было доказать.

31. УГОЛ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Вертикальные углы равны, а смежные углы дополняют друг друга до 180°. Угловая мера меньшего из них называется *углом между прямыми*. Угол между перпендикулярными прямыми равен 90° по определению. Угол между параллельными прямыми считаем равным нулю.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым. Этот угол не зависит от выбора пересекающихся прямых. Докажем это.

Пусть a_1 и b_1 — прямые, пересекающиеся в точке A и параллельные данным скрещивающимся прямым a и b (рис. 78). Пусть a_2 и b_2 — другие прямые, параллельные данным и пересекающиеся в точке B. По теореме 2.2 прямые a_1 и a_2 параллельны (или совпадают) и прямые b_1 и b_2 параллельны (или совпадают).

Используем параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B. Так как при параллельном переносе каждая прямая переходит либо в себя, либо в параллельную прямую, то указанный параллельный перенос переводит прямую a_1 в прямую a_2, а прямую b_1 — в прямую b_2. Поскольку параллельный перенос сохраняет величину угла, то угол между прямыми

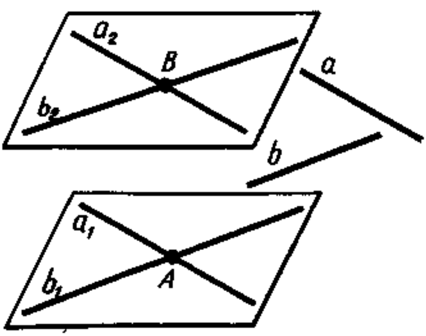


Рис. 78

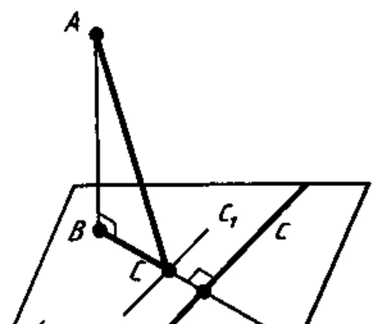


Рис. 79

a_1 и b_1 равен углу между прямыми a_2 и b_2, что и требовалось доказать.

По данному ранее определению перпендикулярными называются прямые, пересекающиеся под прямым углом. Но иногда скрещивающиеся прямые также называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Задача (33). Докажите, что любая прямая на плоскости, перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и наклонной. И, обратно, если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Решение. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости α, AC — наклонная и c — прямая в плоскости α, перпендикулярная BC (рис. 79). Проведем через основание C наклонной прямую $c_1 \parallel c$.

По теореме о трех перпендикулярах c_1 перпендикулярна наклонной AC. А так как угол между прямой c и наклонной AC равен углу между прямыми AC и c_1, то прямая c также перпендикулярна наклонной AC.

Обратно: если прямая c перпендикулярна наклонной AC, то прямая c_1 также перпендикулярна ей, а потому, по теореме о трех перпендикулярах, и ее проекции BC. Так как $c \parallel c_1$, то $c \perp BC$.

32. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

Дадим определение угла между прямой и плоскостью.

Пусть α — плоскость и a — прямая, пересекающая ее и не перпендикулярная плоскости α (рис. 80). Основания перпендикуляров, опущенных из точек прямой a на плоскость α, лежат

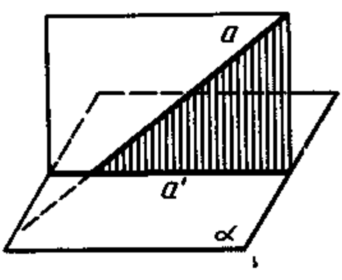


Рис. 80

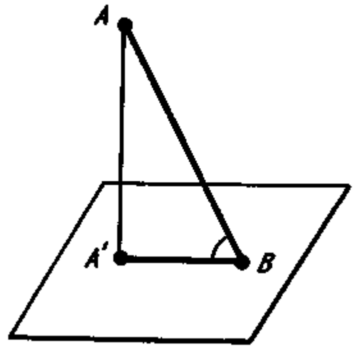


Рис. 81

на прямой a'. Эта прямая называется *проекцией прямой a* на плоскость α. *Углом между прямой и плоскостью* называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ней и плоскостью считается равным $90°$, а между параллельными прямой и плоскостью — $0°$. Так как прямая a, ее проекция a' на плоскость α и перпендикуляр к плоскости α в точке ее пересечения с прямой a лежат в одной плоскости, то *угол между прямой и плоскостью дополняет до $90°$ угол между этой прямой и перпендикуляром к плоскости.*

Задача (35). Точка A отстоит от плоскости на расстояние h. Найдите длины наклонных, проведенных из этой точки под такими углами к плоскости: 1) $30°$, 2) $45°$, 3) $60°$.

Решение. Опустим перпендикуляр AA' на плоскость (рис. 81). Треугольник $AA'B$ — прямоугольный с прямым углом при вершине A'. Острый угол этого треугольника, противолежащий катету AA', равен $30°$ (соответственно $45°$, $60°$). Поэтому в первом случае наклонная $AB=\dfrac{AA'}{\sin 30°}=2h$, во втором — $AB=h\sqrt{2}$, а в третьем — $AB=\dfrac{2h}{\sqrt{3}}$.

33. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Дадим определение угла между плоскостями. Угол между параллельными плоскостями считается равным нулю.

Пусть данные плоскости пересекаются. Проведем плоскость, перпендикулярную прямой их пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми называется *углом между данными плоскостями* (рис. 82).

Определяемый так угол между плоскостями не зависит от выбора секущей плоскости. Докажем это.

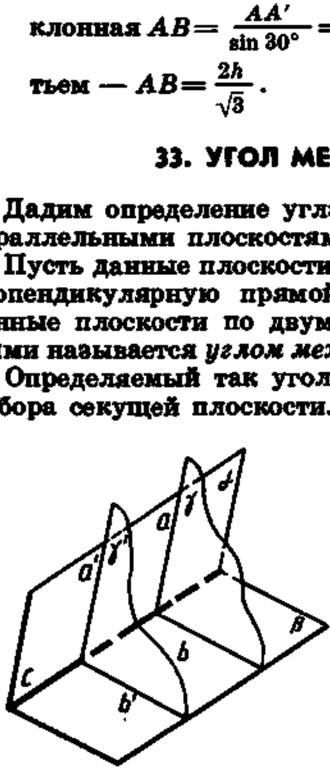


Рис. 82

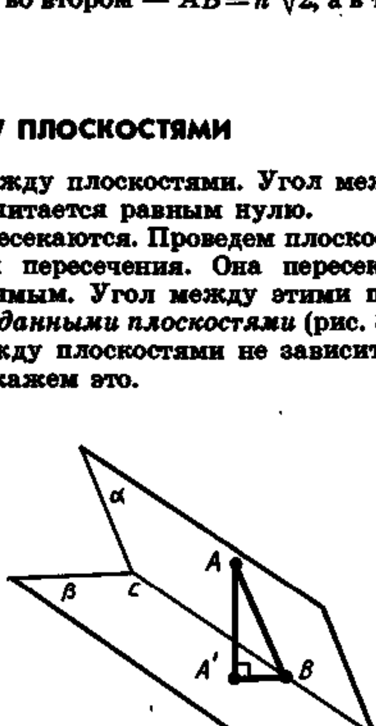


Рис. 83

Пусть α и β — данные плоскости, пересекающиеся по прямой c. Проведем плоскость γ, перпендикулярную прямой c. Она пересечет плоскости α и β по прямым a и b. Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a и b.

Возьмем другую секущую плоскость γ', перпендикулярную прямой c. Пусть a' и b' — прямые пересечения этой плоскости с плоскостями α и β.

Выполним параллельный перенос, при котором точка пересечения плоскости γ с прямой c переходит в точку пересечения плоскости γ' с прямой c. При этом по свойству параллельного переноса прямая a переходит в прямую a', а прямая b — в прямую b'.

Это значит, что углы между прямыми a и b, a' и b равны, что и требовалось доказать.

Задача (43). Две плоскости пересекаются под углом 30°. Точка A, лежащая в одной из этих плоскостей, находится от другой плоскости на расстоянии a. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

Решение. Пусть α и β — данные плоскости и A — точка, лежащая в плоскости α (рис. 83). Опустим перпендикуляр AA' на плоскость β и перпендикуляр AB на прямую c, по которой пересекаются плоскости. По теореме о трех перпендикулярах $A'B \perp c$. Плоскость треугольника ABA' перпендикулярна прямой c и потому угол при вершине B прямоугольного треугольника ABA' равен 30°. Имеем:

$$AB = \frac{AA'}{\sin 30^\circ} = a : \frac{1}{2} = 2a.$$

Расстояние от точки A до прямой c равно $2a$.

34. ПЛОЩАДЬ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ МНОГОУГОЛЬНИКА

Теорема 4.1. ***Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.***

Доказательство. Рассмотрим сначала треугольник и его проекцию на плоскость, проходящую через одну из его сторон (рис. 84). Проекцией треугольника ABC является треугольник ABC_1 в плоскости α. Проведем высоту CD треугольника ABC. По теореме о трех перпендикулярах отрезок C_1D — высота треугольника ABC_1. Угол CDC_1 равен углу φ между

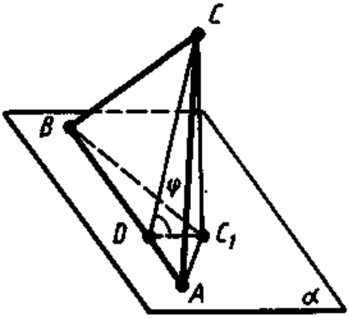


Рис. 84

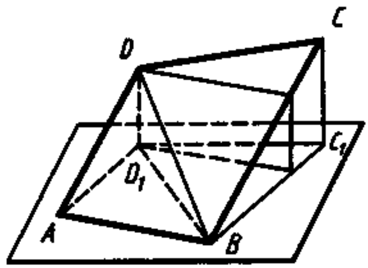


Рис. 85

плоскостью треугольника ABC и плоскостью проекции α. Имеем:

$$C_1D = CD\cos\varphi,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot CD, \quad S_{ABC_1} = \frac{1}{2}AB\cdot C_1D.$$

Отсюда

$$S_{ABC_1} = S_{ABC}\cdot\cos\varphi.$$

Таким образом, для рассматриваемого случая теорема верна. Теорема верна и для случая, когда вместо плоскости α возьмем любую параллельную ей плоскость. Действительно, при проектировании фигуры на параллельные плоскости ее проекции совмещаются параллельным переносом в направлении проектирования. А совмещенные параллельным переносом фигуры равны.

Рассмотрим теперь общий случай. Разобьем данный многоугольник на треугольники. Каждый треугольник, не имеющий стороны, параллельной плоскости проекции, разобьем на два треугольника с общей стороной, параллельной плоскости проекции, как это показано для четырехугольника $ABCD$ на рисунке 85.

Теперь для каждого треугольника Δ нашего разбиения и его проекции Δ' запишем равенство $S_{\Delta'} = S_{\Delta}\cdot\cos\varphi$. Все эти равенства сложим почленно. Тогда получим слева площадь проекции многоугольника, а справа — площадь самого многоугольника, умноженную на $\cos\varphi$. Теорема доказана.

35. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

В пространстве, как и на плоскости, *вектором* называется направленный отрезок. Так же, как и на плоскости, определяют основные понятия для векторов в пространстве: абсолютная величина вектора, направление вектора, равенство векторов.

Координатами вектора с началом в точке $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и концом в точке $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ называют числа x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1. Так же, как и на плоскости, доказывают, что равные векторы имеют соответственно равные координаты, и, обратно, векторы с соответственно равными координатами равны. Это дает основание обозначать вектор его координатами: $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ или просто $\overline{(a_1;\ a_2;\ a_3)}$.

Задача (50). Даны четыре точки: $A(2;\ 7;\ -3)$, $B(1;\ 0;\ 3)$, $C(-3;\ -4;\ 5)$, $D(-2;\ 3;\ -1)$. Укажите среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ равные векторы.

Решение. Нужно найти координаты искомых векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... и сравнить соответствующие координаты. Равные векторы имеют соответственно равные координаты. Например, вектор $\overline{AB}$ имеет координаты: $1-2=-1$, $0-7=-7$, $3-(-3)=6$. Вектор $\overline{DC}$ имеет такие же координаты: $-3-(-2)=-1$, $-4-3=-7$, $5-(-1)=6$. Значит, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ равны. Другая пара равных векторов $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$.

36. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Так же, как и на плоскости, определяют действия над векторами: сложение, умножение на число и скалярное произведение.

Суммой векторов $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\bar{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ называется вектор $\bar{c}(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$.

Так же, как и на плоскости, доказывают векторное равенство

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Произведением вектора $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ на число λ называется вектор $\lambda\overline{a}=\overline{(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)}$.

Так же, как и на плоскости, доказывают, что абсолютная величина вектора $\lambda\overline{a}$ равна $|\lambda||\overline{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно направлению вектора $\overline{a}$, если $\lambda<0$.

З а д а ч а (54). Дан вектор $\overline{a}\ (1;\ 2;\ 3)$. Найдите коллинеарный ему вектор с началом в точке $A\ (1;\ 1;\ 1)$ и концом B на плоскости xy.

Р е ш е н и е. Координата z точки B равна нулю. Координаты вектора $\overline{AB}$: $x-1,\ y-1,\ 0-1=-1$. Из коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{AB}$ получаем пропорцию

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{-1}{3}.$$

Отсюда находим координаты x, y точки B:

$$x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}.$$

Скалярным произведением векторов $(\overline{a_1;\ a_2;\ a_3})$ и $(\overline{b_1;\ b_2;\ b_3})$ называется число $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Так же, как и на плоскости, доказывают, что скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между векторами.

З а д а ч а (59). Даны четыре точки: $A\,(0;\ 1;\ -1)$, $B\,(1;\ -1;\ 2)$, $C\,(3;\ 1;\ 0)$, $D\,(2;\ -3;\ 1)$. Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Р е ш е н и е. Координаты вектора $\overline{AB}$: $1-0=1$, $-1-1=2$, $2-(-1)=3$; $|\overline{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}$.
Координаты вектора $\overline{CD}$: $2-3=-1$, $-3-1=-4$, $1-0=$ $=1$; $|\overline{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}$.
Отсюда

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|}=\frac{1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-4)+3\cdot 1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\frac{5}{\sqrt{63}}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объясните, как определяются координаты точки в пространстве.
2. Выразите расстояние между двумя точками через координаты этих точек.
3. Выведите формулы для координат середины отрезка через координаты его концов.

4. Что такое преобразование симметрии относительно точки? Какая фигура называется центрально-симметричной?
5. Объясните, что такое преобразование симметрии относительно плоскости. Что такое плоскость симметрии фигуры?
6. Какое преобразование фигуры называется движением?
7. Докажите, что движение в пространстве переводит плоскость в плоскость.
8. Какие фигуры в пространстве называются равными?
9. Дайте определение параллельного переноса.
10. Перечислите свойства параллельного переноса.
11. Докажите, что при параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную плоскость.
12. Что такое преобразование подобия? Перечислите его свойства.
13. Какое преобразование называется гомотетией? Докажите, что преобразование гомотетии в пространстве переводит любую плоскость, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость (или в себя).
14. Дайте определение угла между скрещивающимися прямыми.
15. Дайте определение угла между прямой и плоскостью.
16. Дайте определение угла между плоскостями.
17. Докажите, что площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью его проекции.
18. Что такое абсолютная величина вектора? Какие векторы называются одинаково направленными?
19. Дайте определение координат вектора с началом в точке $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и концом в точке $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$.
20. Дайте определение действий над векторами: сложения, умножения на число, скалярного произведения.

ЗАДАЧИ

1. Где лежат те точки пространства, для которых координаты x и y равны нулю?
2. Даны точки: $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(0;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 0;\ 3)$, $D(1;\ 2;\ 0)$. Какие из этих точек лежат: 1) в плоскости xy; 2) на оси z; 3) в плоскости yz?

3. Дана точка $A\,(1;\ 2;\ 3)$. Найдите основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на координатные оси и координатные плоскости.

4. Найдите расстояния от точки $(1;\ 2;\ -3)$ до: 1) координатных плоскостей; 2) осей координат; 3) начала координат.

5. В плоскости xy найдите точку $D\,(x;\ y;\ 0)$, равноудаленную от трех данных точек: $A\,(0;\ 1;\ -1)$, $B\,(-1;\ 0;\ 1)$, $C\,(0;\ -1;\ 0)$.

6. Найдите точки, равноотстоящие от точек $(0;\ 0;\ 1)$, $(0;\ 1;\ 0)$, $(1;\ 0;\ 0)$ и отстоящие от плоскости yz на расстояние 2.

7. На оси x найдите точку $C\,(x;\ 0;\ 0)$, равноудаленную от двух точек $A\,(1;\ 2;\ 3)$, $B\,(-2;\ 1;\ 3)$.

8. Составьте уравнение геометрического места точек пространства, равноудаленных от точки $A\,(1;\ 2;\ 3)$ и начала координат.

9. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\,(1;\ 2;\ 3)$, $B\,(0;\ 2;\ 4)$, $C\,(1;\ 1;\ 4)$, $D\,(2;\ 2;\ 2)$ является параллелограммом.

10. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: 1) $A\,(0;\ 2;\ -3)$, $B\,(-1;\ 1;\ 1)$, $C\,(2;\ -2;\ -1)$, $D\,(3;\ -1;\ -5)$; 2) $A\,(2;\ 1;\ 3)$, $B\,(1;\ 0;\ 7)$, $C\,(-2;\ 1;\ 5)$, $D\,(-1;\ 2;\ 1)$.

11. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом, если: 1) $A\,(6;\ 7;\ 8)$, $B\,(8;\ 2;\ 6)$, $C\,(4;\ 3;\ 2)$, $D\,(2;\ 8;\ 4)$; 2) $A\,(0;\ 2;\ 0)$, $B\,(1;\ 0;\ 0)$, $C\,(2;\ 0;\ 2)$, $D\,(1;\ 2;\ 2)$.

12. Даны: один конец отрезка $A\,(2;\ 3;\ -1)$ и его середина $C\,(1;\ 1;\ 1)$. Найдите второй конец отрезка $B\,(x;\ y;\ z)$.

13. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если координаты других трех его вершин известны: 1) $A\,(2;\ 3;\ 2)$, $B\,(0;\ 2;\ 4)$, $C\,(4;\ 1;\ 0)$; 2) $A\,(1;\ -1;\ 0)$, $B\,(0;\ 1;\ -1)$, $C\,(-1;\ 0;\ 1)$; 3) $A\,(4;\ 2;\ -1)$, $B\,(1;\ -3;\ 2)$, $C\,(-4;\ 2;\ 1)$.

14. Докажите, что середина отрезка с концами в точках $A\,(a;\ c;\ -b)$ и $B\,(-a;\ d;\ b)$ лежит на оси y.

15. Докажите, что середина отрезка с концами в точках $C\,(a;\ b;\ c)$ и $D\,(p;\ q;\ -c)$ лежит в плоскости xy.

16. Докажите, что преобразование симметрии относительно координатной плоскости xy задается формулами $x'=x$, $y'=y$, $z'=-z$.

17. Даны точки: $(1;\ 2;\ 3)$, $(0;\ -1;\ 2)$, $(1;\ 0;\ -3)$. Найдите точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.

18. Даны точки: (1; 2; 3), (0; −1; 2), (1; 0; −3). Найдите точки, симметричные им относительно начала координат.

19. Докажите, что преобразование симметрии относительно точки есть движение.

20*. Докажите, что преобразование симметрии относительно плоскости есть движение.

21. Докажите, что в результате движения в пространстве круг переходит в круг того же радиуса.

22. Докажите, что в результате движения в пространстве три точки, лежащие на прямой, переходят в три точки, лежащие также на одной прямой.

23. Найдите значения a, b, c из формул параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка A (1; 0; 2) переходит в точку A' (2; 1; 0).

24. При параллельном переносе точка A (2; 1; −1) переходит в точку A' (1; −1; 0). В какую точку переходит начало координат?

25. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B, а точка C — в точку D, если:
1) A (2; 1; 0), B (1; 0; 1), C (3; −2; 1), D (2; −3; 0);
2) A (−2; 3; 5), B (1; 2; 4), C (4; −3; 6), D (7; −2; 5);
3) A (0; 1; 2), B (−1; 0; 1), C (3; −2; 2), D (2; −3; 1);
4) A (1; 1; 0), B (0; 0; 0), C (−2; 2; 1), D (1; 1; 1)?

26. Докажите, что при параллельном переносе параллелограмм переходит в равный ему параллелограмм.

27. Четыре параллельные прямые пересекают параллельные плоскости в вершинах параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что параллелограммы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ совмещаются параллельным переносом.

28. Докажите, что преобразование гомотетии в пространстве является преобразованием подобия.

29. Три прямые, проходящие через точку S, пересекают данную плоскость в точках A, B, C и параллельную ей плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны.

30. Прямая a лежит в плоскости α, а прямая b перпендикулярна этой плоскости. Чему равен угол между прямыми a и b?

31*. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Чему равен угол между прямыми CA и CB, если эти прямые образуют углы α и β с прямой AB и $\alpha + \beta < 90°$?

51. Даны три точки: $A\,(1;\ 0;\ 1)$, $B\,(-1;\ 1;\ 2)$, $C\,(0;\ 2;\ -1)$. Найдите точку $D\,(x;\ y;\ z)$, если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны.

52. Найдите точку D в задаче 51, если сумма векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равна нулю.

53. Даны векторы $\overline{(2;\ n;\ 3)}$ и $\overline{(3;\ 2;\ m)}$. При каких m и n эти векторы коллинеарны?

54. Дан вектор $\overline{a}\,(1;\ 2;\ 3)$. Найдите коллинеарный ему вектор с началом в точке $A\,(1;\ 1;\ 1)$ и концом в точке B на плоскости xy.

55. При каких значениях n данные векторы перпендикулярны: 1) $\overline{a}\,(2;\ -1;\ 3)$, $\overline{b}\,(1;\ 3;\ n)$; 2) $\overline{a}\,(n;\ -2;\ 1)$, $\overline{b}\,(n;\ -n;\ 1)$; 3) $\overline{a}\,(n;\ -2;\ 1)$, $\overline{b}\,(n;\ 2n;\ 4)$; 4) $\overline{a}\,(4;\ 2n;\ -1)$, $\overline{b}\,(-1;\ 1;\ n)$?

56. Даны точки: $A\,(1;\ 0;\ 1)$, $B\,(-1;\ 1;\ 2)$, $C\,(0;\ 2;\ -1)$. Найдите на оси z такую точку $D\,(0;\ 0;\ c)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были перпендикулярны.

57* Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 60°, а вектор $\overline{c}$ перпендикулярен им. Найдите абсолютную величину вектора $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$.

58* Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ единичной длины образуют попарно углы 60°. Найдите угол φ между векторами: 1) $\overline{a}$ и $\overline{b}+\overline{c}$; 2) $\overline{a}$ и $\overline{b}-\overline{c}$.

59. Даны четыре точки: $A\,(0;\ 1;\ -1)$, $B\,(1;\ -1;\ 2)$, $C\,(3;\ 1;\ 0)$, $D\,(2;\ -3;\ 1)$. Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

60. Даны три точки: $A\,(0;\ 1;\ -1)$, $B\,(1;\ -1;\ 2)$, $C\,(3;\ 1;\ 0)$. Найдите косинус угла C треугольника ABC.

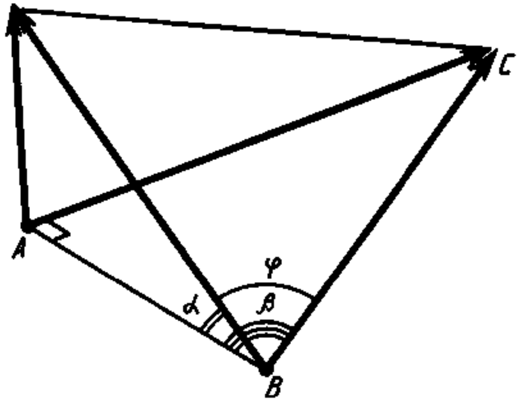


Рис. 87

61* Докажите, что угол φ между прямыми, на которых лежат векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, определяется из уравнения:

$$|\bar{a}\,\bar{b}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos\varphi.$$

62* Из вершины прямого угла A треугольника ABC проведен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{BC}$ и $\overline{BD}$, если угол ABD равен α, а угол ABC равен β (рис. 87).

63. Наклонная с плоскостью образует угол 45°. Через основание наклонной проведена прямая в плоскости под углом 45° к проекции наклонной. Найдите угол φ между этой прямой и наклонной.

64* Из точки вне плоскости проведены перпендикуляр и две равные наклонные, образующие углы α с перпендикуляром. Найдите угол φ между проекциями наклонных, если угол между наклонными равен β.

11 класс

§ 5. МНОГОГРАННИКИ

37. ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с ограничивающей их общей прямой (рис. 88). Полуплоскости называются *гранями*, а прямая, ограничивающая их,— *ребром* двугранного угла.

Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым. Угол, образованный этими полупрямыми, называется *линейным углом* двугранного угла. За меру двугранного угла принимается мера соответствующего ему линейного угла. Все линейные углы двугранного угла совмещаются параллельным переносом, то есть, они равны. Поэтому мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла.

Задача (1). Из точек A и B, лежащих на гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найдите длину отрезка AB, если $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$ и двугранный угол равен α (рис. 89).

Решение. Проведем прямые $A_1C \parallel BB_1$ и $BC \parallel A_1B_1$. Четырехугольник A_1B_1BC — параллелограмм, следовательно, $A_1C=BB_1=b$. Прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости треугольника AA_1C, так как она перпендику-

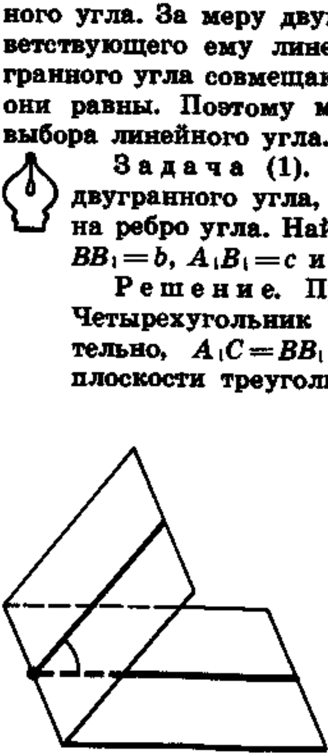


Рис. 88

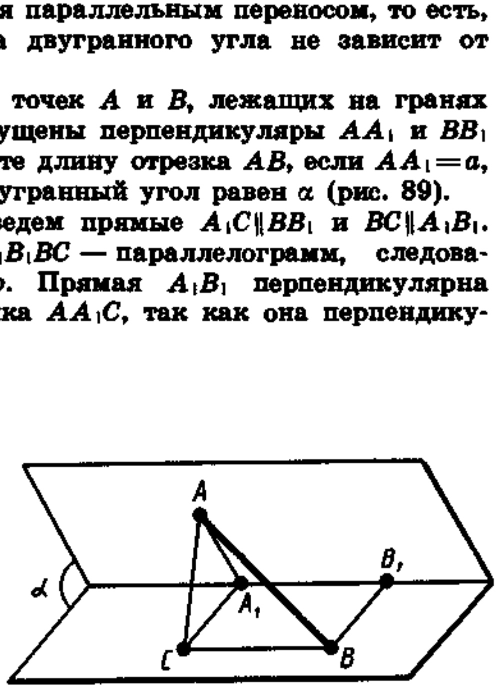


Рис. 89

лярна двум прямым этой плоскости AA_1 и CA_1. Значит, параллельная ей прямая BC также перпендикулярна этой плоскости. Поэтому треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C. По теореме косинусов

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = \\ = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + c^2}.$$

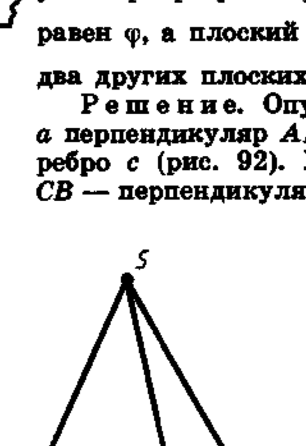
38. ТРЕХГРАННЫЙ И МНОГОГРАННЫЙ УГЛЫ

Рассмотрим три луча a, b, c, выходящие из одной точки и не лежащие в одной плоскости. *Трехгранным углом* (abc) называется фигура, составленная из трех плоских углов (ab), (bc) и (ac) (рис. 90). Эти углы называются *гранями* трехгранного угла, а их стороны — *ребрами*. Общая вершина плоских углов называется *вершиной* трехгранного угла. Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла, называются *двугранными углами трехгранного угла*.

Аналогично дают определение *многогранного* угла (рис. 91).

З а д а ч а (2). У трехгранного угла (abc) двугранный угол при ребре c прямой, двугранный угол при ребре b равен φ, а плоский угол (bc) равен γ $\left(\varphi,\ \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите два других плоских угла: $\alpha = \angle(ab)$, $\beta = \angle(ac)$.

Р е ш е н и е. Опустим из произвольной точки A ребра a перпендикуляр AB на ребро b и перпендикуляр AC на ребро c (рис. 92). По теореме о трех перпендикулярах CB — перпендикуляр к ребру b.



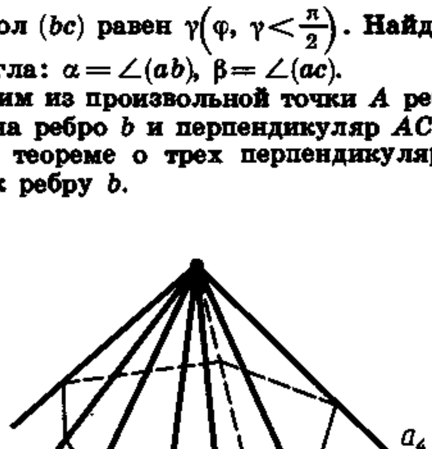


Рис. 91

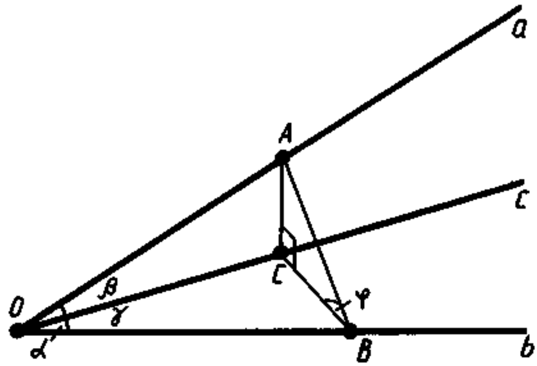


Рис. 92

Из прямоугольных треугольников OAB, OCB, AOC и ABC имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = AB : OB = \frac{BC}{\cos\varphi} : \frac{BC}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi},$$

$$\operatorname{tg}\beta = AC : OC = BC\operatorname{tg}\varphi : \frac{BC}{\sin\gamma} = \operatorname{tg}\varphi\sin\gamma.$$

Замечание. Зависимости между углами α, β, γ, φ, которые получили:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi},\ \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\varphi\sin\gamma,$$

дают возможность, зная два угла, найти два других угла.

39. МНОГОГРАННИК

В стереометрии изучают фигуры в пространстве, называемые телами. Наглядно (геометрическое) тело нужно представлять как часть пространства, занятую физическим телом и ограниченную поверхностью.

Многогранник — это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников (рис. 93). Многогранник называется *выпуклым*, если он лежит с одной стороны от плоскости каждого из плоских многоугольников на его поверхности. Общая часть такой плоскости и поверхности выпуклого многогранника называется *гранью*. Грани выпуклого многогранника являются плоскими выпуклыми многоугольниками. Стороны граней называются *ребрами многогранника*, а вершины — *вершинами многогранника*.

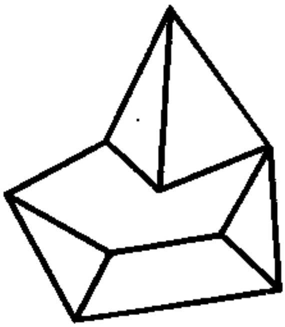


Рис. 93

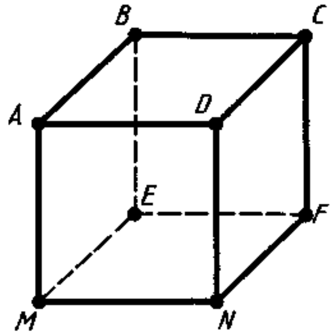


Рис. 94

Объясним сказанное на примере известного всем куба (рис. 94). Куб — это выпуклый многогранник. Его поверхность состоит из шести квадратов $ABCD$, $BEFC$, ... Они являются его гранями. Ребрами куба являются стороны этих квадратов AB, BC, BE, ... Вершинами куба являются вершины квадратов A, B, C, D, E ... . У куба шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин.

Простейшим многогранникам — призмам и пирамидам, которые будут основным объектом нашего изучения, мы дадим такие определения, в которых по существу не используется понятие тела. Определим их как геометрические фигуры с указанием всех точек пространства, принадлежащих им. Понятие геометрического тела и его поверхности будет дано позже.

3*

40. ПРИЗМА

Призмой называется многогранник, состоящий из двух плоских многоугольников, лежащих в различных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников (рис. 95). Многоугольники называются *основаниями призмы*, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины,— *боковыми ребрами призмы*.

Так как параллельный перенос является движением, то *основания призмы равны*.

Поскольку при параллельном переносе плоскость переходит в параллельную плоскость (или в себя), то *у призмы основания лежат в параллельных плоскостях*.

При параллельном переносе точки смещаются вдоль параллельных прямых или совпадающих прямых на одно и то же

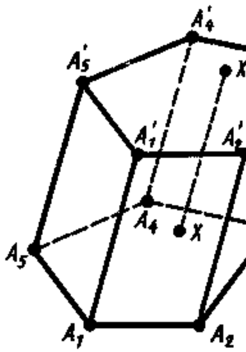


Рис. 95

расстояние, поэтому ***боковые ребра призмы параллельны и равны.***

Поверхность призмы состоит из оснований и боковой поверхности. *Боковая поверхность* состоит из параллелограммов. Каждый из этих параллелограммов имеет две стороны, являющиеся соответствующими сторонами оснований, а две другие — соседними боковыми ребрами.

Высотой призмы называется расстояние между плоскостями ее оснований. Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю призмы.*

Призма называется n-угольной, если ее основание — n-угольники. Далее мы будем рассматривать только призмы, у которых основания — выпуклые многоугольники. Такие призмы являются выпуклыми многогранниками. На рисунке 95 изображена пятиугольная призма. Основаниями ее являются пятиугольники $A_1A_2...A_5$, $A_1'A_2'...A_5'$. XX' — отрезок, соединяющий соответствующие точки оснований. Боковые ребра призмы — отрезки A_1A_1', A_2A_2', ... , A_5A_5'. Боковые грани призмы — параллелограммы $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, ...

41. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРИЗМЫ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ СЕЧЕНИЙ

В соответствии с правилами параллельного проектирования призму изображают так. Сначала строят одно из оснований P (рис. 96). Это некоторый плоский многоугольник. Затем из вершин многоугольника P проводят боковые ребра призмы в виде параллельных отрезков одинаковой длины. Концы этих отрезков соединяют и получают второе основание призмы. Невидимые ребра изображают штриховыми линиями.

Сечения призмы плоскостями, параллельными боковым ребрам, являются параллелограммами. В частности, параллелограммами являются *диагональные сечения.* Это сечения призмы плоскостями, проходящими через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани (рис. 97).

На практике, например при решении задач, часто приходится строить сечение призмы плоскостью, проходящей через заданную прямую g, лежащую в плоскости одного из оснований призмы. Такая прямая называется *следом* секущей плоскости на плоскости основания. Для построения сечения призмы доста-

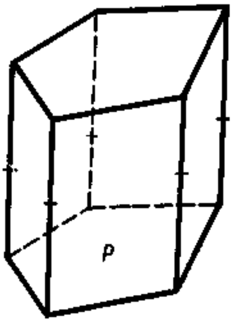


Рис. 96

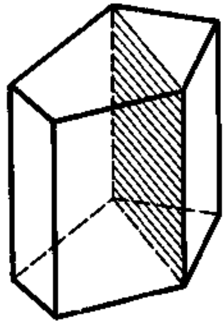


Рис. 97

точно построить отрезки пересечения секущей плоскости с гранями призмы. Покажем, как построить такое сечение, если известна какая-нибудь точка A на поверхности призмы, принадлежащая сечению (рис. 98).

Если данная точка A принадлежит второму основанию призмы, то его пересечением с секущей плоскостью является отрезок BC, параллельный следу g и содержащий данную точку A (рис. 98, *а*).

Если данная точка A принадлежит боковой грани, то пересечение этой грани с секущей плоскостью строят, как показано на рисунке 98, *б*. А именно, сначала строят точку D, в которой плоскость грани пересекает данный след g. Потом проводят прямую через точки A и D. Отрезок BC прямой AD на рассматриваемой грани и есть пересечение этой грани с секущей плос-

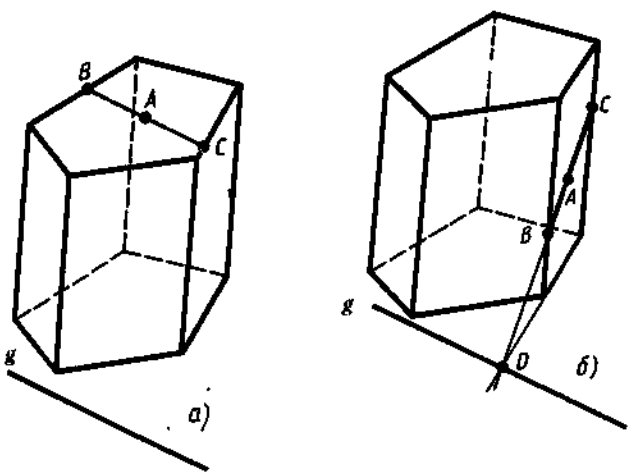


Рис. 98

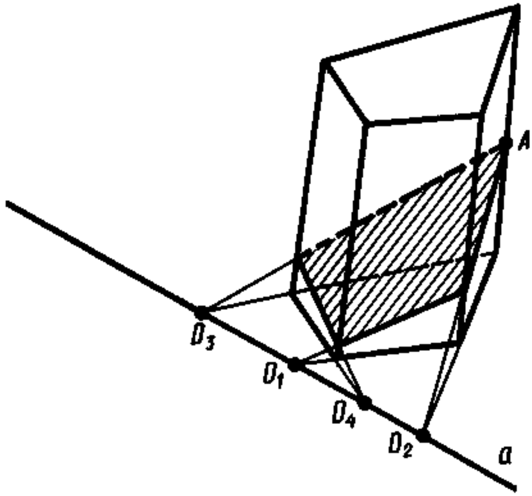


Рис. 99

костью. Если грань, содержащая точку A, параллельна следу g, то секущая плоскость пересекает эту грань по отрезку BC, проходящему через точку A и параллельному прямой g.

Концы отрезка BC принадлежат и соседним граням. Поэтому таким способом можно построить пересечение этих граней с нашей секущей плоскостью. И так далее.

На рисунке 99 показано построение сечения четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через прямую a плоскости нижнего основания призмы и точку A, лежащую на одном из боковых ребер.

42. ПРЯМАЯ ПРИЗМА

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. В противном случае призма называется *наклонной*.

Боковые грани прямой призмы прямоугольники. Изображая прямую призму на рисунке, боковые ребра обычно проводят вертикально (рис. 100).

Прямая призма называется *правильной*, если ее основания — правильные многоугольники.

Боковой поверхностью (точнее, площадью боковой поверхности) *призмы* называется сумма площадей боковых граней. *Полная поверхность призмы* равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

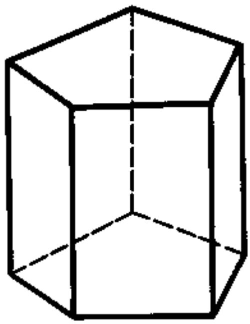


Рис. 100

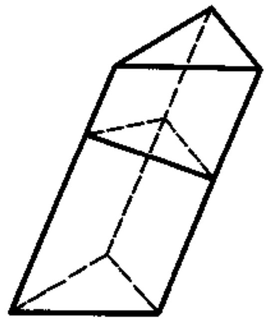


Рис. 101

Теорема 5.1. ***Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, то есть на длину бокового ребра.***

Доказательство. Боковые грани прямой призмы — прямоугольники. Основания этих прямоугольников являются сторонами многоугольника, лежащего в основании призмы, а высоты равны длине боковых ребер. Отсюда следует, что боковая поверхность призмы равна:

$$S=a_1l+a_2l+\ \dots\ +a_nl=pl,$$

где $a_1, \dots, a_n$ — длины ребер основания, p — периметр основания призмы, а l — длина боковых ребер. Теорема доказана.

Задача (22). В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам, пересекающее все боковые ребра. Найдите боковую поверхность призмы, если периметр сечения равен p, а боковые ребра равны l.

Решение. Плоскость проведенного сечения разбивает призму на две части (рис. 101). Применим к одной из них параллельный перенос, совмещающий основания призмы. При этом получим прямую призму, основанием которой является сечение данной призмы, а боковые ребра равны l. Эта призма имеет ту же боковую поверхность, что и данная. Таким образом, боковая поверхность данной призмы равна pl.

43. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Если основанием призмы является параллелограмм, то она называется *параллелепипедом*. У параллелепипеда все грани — параллелограммы.

На рисунке 102, *а* изображен наклонный параллелепипед, а на рисунке 102, *б* — прямой параллелепипед.

а) б)

Рис. 102

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются *противолежащими*.

Теорема 5.2. ***Противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.***

Доказательство. Рассмотрим какие-нибудь две противолежащие грани параллелепипеда, например $A_1A_2A_2'A_1'$ и $A_3A_4A_4'A_3'$ (рис. 103). Так как все грани параллелепипеда — параллелограммы, то прямая A_1A_2 параллельна прямой A_3A_4, а прямая A_1A_1' параллельна прямой A_4A_4'. Отсюда следует, что плоскости рассматриваемых граней параллельны.

Из того, что грани параллелепипеда — параллелограммы, следует, что отрезки A_1A_4, $A_1'A_4'$, $A_2'A_3'$ и A_2A_3 параллельны и равны. Отсюда делаем вывод, что грань $A_1A_2A_2'A_1'$ совмещается параллельным переносом вдоль ребра A_1A_4 с гранью $A_3A_4A_4'A_3'$. Следовательно, эти грани равны.

Аналогично доказываем параллельность и равенство любых двух противолежащих граней параллелепипеда. Теорема доказана.

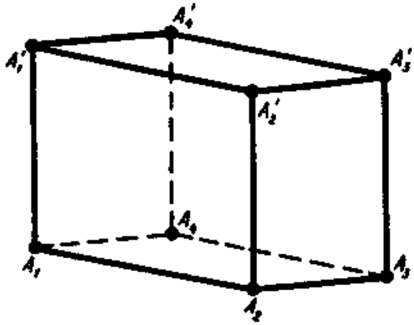


Рис. 103

44. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Теорема 5.3. ***Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.***

Доказательство. Рассмотрим любые две диагонали параллелепипеда, например A_1A_3' и A_4A_2' (рис. 104). Так как четырехугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $A_2A_2'A_3'A_3$ — параллелограммы с общей стороной A_2A_3, то их стороны A_1A_4 и $A_2'A_3'$ параллельны одна другой, значит, лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскости противолежащих граней параллелепипеда по параллельным прямым A_1A_2' и A_4A_3'. Следовательно, четырехугольник $A_4A_1A_2'A_3'$ — параллелограмм. Диагонали параллелепипеда A_1A_3' и A_4A_2' являются диагоналями этого параллелограмма. Поэтому они пересекаются и точкой пересечения O делятся пополам.

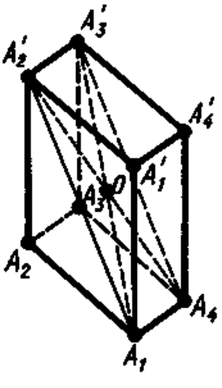


Рис. 104

Аналогично доказывают, что диагонали A_1A_3' и A_2A_4', а также диагонали A_1A_3' и A_3A_1' пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Отсюда делаем вывод, что все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. Теорема доказана.

Из теоремы 5.3 следует, что ***точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.***

45. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом.* Все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны, называется *кубом.*

Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его *линейными размерами (измерениями).* У прямоугольного параллелепипеда три линейных измерения.

Теорема 5.4. ***В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.***

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 105). Из прямоугольного треугольника $AC'C$ по теореме Пифагора имеем:

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2.$$

Из прямоугольного треугольника ACB по теореме Пифагора имеем:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Отсюда

$$AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2.$$

Ребра AB, BC и CC' не параллельны, следовательно, их длины являются линейными размерами параллелепипеда. Теорема доказана.

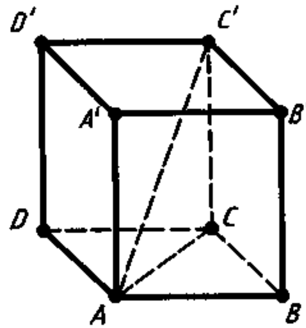


Рис. 105

46. СИММЕТРИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

У прямоугольного параллелепипеда, как и у любого параллелепипеда, есть центр симметрии — точка пересечения его диагоналей. Он имеет также три плоскости симметрии, проходящие через центр симметрии параллельно граням. На рисунке 106 показана одна из таких плоскостей. Она проходит через середины четырех параллельных ребер параллелепипеда. Концы ребер являются симметричными точками.

Если у параллелепипеда все линейные размеры различны, то он не имеет других плоскостей симметрии, кроме названных.

Если же у параллелепипеда два линейных размера одинаковы, то он имеет еще две плоскости симметрии. Это плоскости диагональных сечений, показанные на рисунке 107.

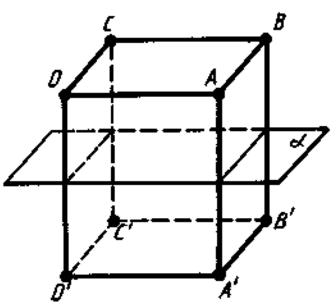


Рис. 106

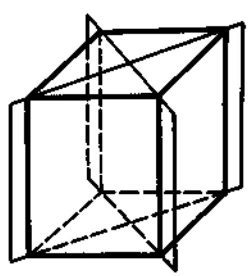


Рис. 107

Если у параллелепипеда все линейные размеры одинаковы, то есть он куб, то плоскость любого его диагонального сечения является плоскостью симметрии. Таким образом, куб имеет девять плоскостей симметрии.

47. ПИРАМИДА

Пирамидой называется многогранник, состоящий из плоского многоугольника — *основания пирамиды*, точки, не лежащей в плоскости основания,— *вершины пирамиды* и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания (рис. 108).

Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются *боковыми ребрами*.

Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней. Каждая боковая грань — треугольник. Одной из его вершин является вершина пирамиды, а противолежащей стороной — сторона основания пирамиды.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

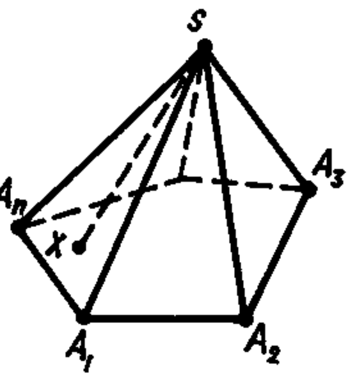


Рис. 108

Пирамида называется n-угольной, если ее основание — n-угольник. Треугольная пирамида называется также *тетраэдром*.

У пирамиды, изображенной на рисунке 108, основание — многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$, вершина пирамиды — S, боковые ребра SA_1, SA_2, ... , SA_n, боковые грани — $\triangle SA_1A_2$, $\triangle SA_2A_3$, ...

В дальнейшем будем рассматривать только пирамиды с выпуклым многоугольником в основании. Такие пирамиды являются выпуклыми многогранниками.

48. ПОСТРОЕНИЕ ПИРАМИДЫ И ЕЕ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

В соответствии с правилами параллельного проектирования пирамиду изображают так. Сначала строят основание. Это — некоторый плоский многоугольник. Потом обозначают вершину пирамиды, которую соединяют боковыми ребрами с вершинами основания. На рисунке 108 изображена пятиугольная пирамида.

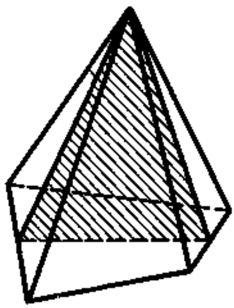


Рис. 109

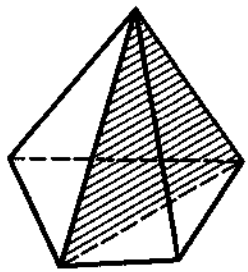


Рис. 110

Сечениями пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершины, являются треугольники (рис. 109). В частности, треугольниками являются *диагональные сечения*. Это сечения плоскостями, проходящими через два не соседних боковых ребра пирамиды (рис. 110).

Сечение пирамиды плоскостью с данным следом g на плоскости основания строят так же, как и сечение призмы. Чтобы построить сечение пирамиды плоскостью, достаточно построить сечения ее боковых граней с секущей плоскостью.

Если на грани, не параллельной следу g, известна какая-нибудь точка A, принадлежащая сечению, то сначала строят сечение следа секущей плоскости с плоскостью этой грани — точку D на рисунке 111. Точку D соединяют с точкой A прямой. Тогда отрезок этой прямой, принадлежащий грани, является пересечением этой грани с секущей плоскостью. Если точка A лежит на грани, параллельной следу g, то секущая плоскость пересекает эту грань по отрезку, параллельному прямой g. Перейдя к соседней боковой грани, строят ее пересечение с секущей плоскостью и т. д. В результате получают искомое сечение пирамиды.

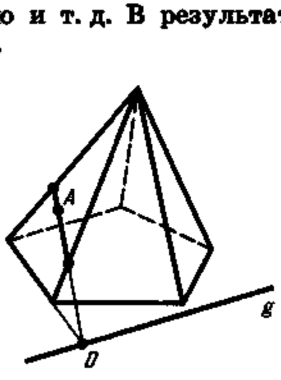


Рис. 111

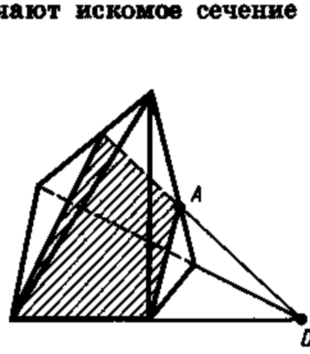


Рис. 112

На рисунке 112 построено сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и точку A на одном из ее боковых ребер.

49. УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Теорема 5.5. ***Плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная ее основанию, отсекает подобную пирамиду.***

Доказательство. Пусть S — вершина пирамиды, A — вершина основания и A' — точка пересечения секущей плоскости с боковым ребром SA (рис. 113). Применим к пирамиде преобразование гомотетии относительно вершины S с коэффициентом гомотетии $k=\frac{SA'}{SA}$. В результате этой гомотетии плоскость основания переходит в параллельную плоскость, проходящую через точку A', то есть в секущую плоскость, а потому вся пирамида — в ту часть пирамиды, которую отсекает эта плоскость. Так как гомотетия является преобразованием подобия, то часть, которую отсекли от пирамиды,— пирамида, подобная данной. Теорема доказана.

По теореме 5.5 плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды и пересекающая ее боковые ребра, отсекает от нее подобную пирамиду. Вторая часть пирамиды — это многогранник, который называется *усеченной пирамидой* (рис. 114). Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях, называются *основаниями*; остальные грани называются *боковыми гранями*. Основания усеченной пирамиды есть подобные (более того, гомотетичные) многоугольники, боковые грани — трапеции.

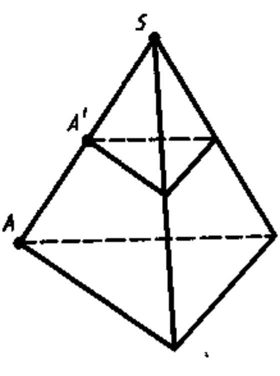


Рис. 113

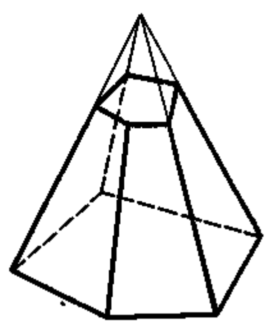


Рис. 114

Задача (54). Боковое ребро пирамиды разделено на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 400 см^2. Найдите площади сечений.

Решение. Сечения подобны основанию пирамиды с коэффициентами подобия $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Площади подобных фигур относятся как квадраты линейных размеров. Поэтому отношения площадей сечений к площади основания пирамиды: $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{2}{4}\right)^2$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^2$. Таким образом, площади сечений равны:

$$400\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=25\ (\text{см}^2),\quad 400\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2=100\ (\text{см}^2),\quad 400\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=225\ (\text{см}^2).$$

50. ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника. *Осью* правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту. Очевидно, у правильной пирамиды боковые ребра равны, следовательно, боковые грани — равные равнобедренные треугольники.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой*. *Боковой поверхностью пирамиды* называется сумма площадей ее боковых граней.

Теорема 5.6. *Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.*

Доказательство. Если сторона основания a, число сторон n, то боковая поверхность пирамиды равна:

$$\frac{al}{2}\cdot n=\frac{anl}{2}=\frac{pl}{2},$$

где l — апофема, а p — периметр основания. Теорема доказана.

Усеченная пирамида, полученная из правильной, также называется *правильной*. Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобокие трапеции; их высоты называются *апофемами*.

Задача (69). Докажите, что боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

Решение. Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции с одним и тем же верхним основанием a, нижним b и высотой (апофемой) l. Поэтому площадь одной грани равна $\frac{1}{2}(a+b)\,l$. Площадь всех граней, то есть боковая поверхность усеченной пирамиды, равна $\frac{1}{2}(an+bn)\,l$, где n — количество вершин основания пирамиды, an и bn — периметры оснований.

51. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его грани — правильные многоугольники с одним и тем же количеством сторон, а в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Существует пять типов правильных выпуклых многогранников (рис. 115): *правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.*

У правильного тетраэдра грани — правильные треугольники; в каждой вершине сходится по три ребра. Тетраэдр — треугольная пирамида, все ребра которой равны.

У куба все грани — квадраты; в каждой вершине сходится по три ребра. Куб — прямоугольный параллелепипед с одинаковыми ребрами.

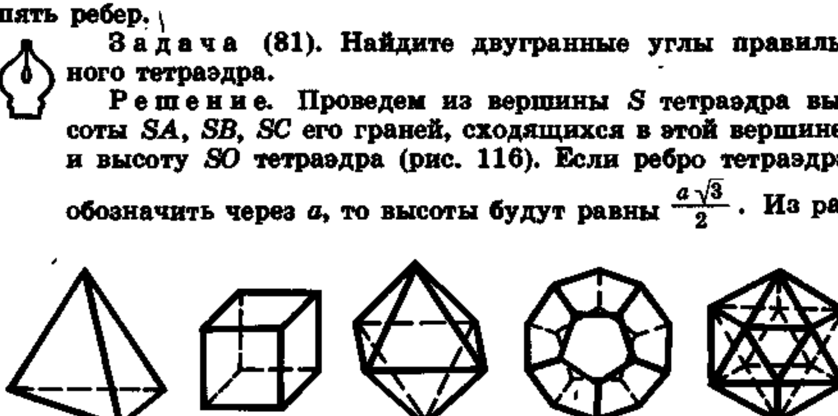
У октаэдра грани — правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра в каждой его вершине сходится по четыре ребра.

У додекаэдра грани — правильные пятиугольники. В каждой вершине его сходится по три ребра.

У икосаэдра грани — правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра и октаэдра в каждой вершине сходится по пять ребер.

Задача (81). Найдите двугранные углы правильного тетраэдра.

Решение. Проведем из вершины S тетраэдра высоты SA, SB, SC его граней, сходящихся в этой вершине, и высоту SO тетраэдра (рис. 116). Если ребро тетраэдра обозначить через a, то высоты будут равны $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из ра-



Тетраэдр *Куб* *Октаэдр* *Додекаэдр* *Икосаэдр*

Рис. 115

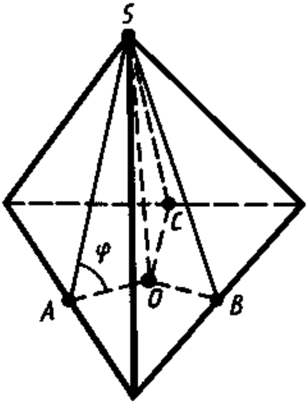


Рис. 116

венства высот SA, SB, SC следует равенство отрезков OA, OB, OC. А они перпендикулярны сторонам треугольника в основании тетраэдра (теорема о трех перпендикулярах). Отсюда следует, что точка O является центром окружности, вписанной в основание тетраэдра. Тогда отрезки OA, OB и OC равны $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Обозначим через φ двугранный угол при ребре, содержащем точку A. Тогда имеем

$$\cos\varphi = \frac{OA}{AS} = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3};$$

$$\varphi \approx 70°32'.$$

Очевидно, двугранные углы при других ребрах тетраэдра такие же по величине.

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое двугранный угол (грань угла, ребро угла)?
2. Что такое линейный угол двугранного угла?
3. Почему мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла?
4. Объясните, что такое трехгранный угол (грани и ребра трехгранного угла).
5. Объясните, что такое плоские и двугранные углы трехгранного угла.
6. Что такое многогранник?
7. Какой многогранник называется выпуклым?
8. Что такое грань выпуклого многогранника, ребро, вершина?
9. Что такое призма (основания призмы, боковые грани, ребра)?
10. Докажите, что основания призмы лежат на параллельных плоскостях и равны, боковые ребра параллельны и равны, боковые грани — параллелограммы.
11. Что такое высота призмы?
12. Что такое диагональ призмы?
13. Какой фигурой является сечение призмы плоскостью, параллельной боковым ребрам, в частности, диагональное сечение?
14. Как построить сечение призмы плоскостью, проходящей через данную прямую в плоскости основания призмы и данную точку на одной из боковых граней?

15. Какая призма называется прямой (наклонной)?
16. Какая призма называется правильной?
17. Что такое боковая поверхность призмы (полная поверхность призмы)?
18. Докажите, что боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.
19. Что такое параллелепипед?
20. Докажите, что противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.
21. Докажите, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.
22. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.
23. Какой параллелепипед называется прямоугольным? Что такое линейные размеры прямоугольного параллелепипеда?
24. Что такое куб?
25. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде квадрат диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.
26. Сколько плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед?
27. Что такое пирамида (основание пирамиды, боковые грани, ребра, высота)?
28. Какой фигурой является сечение пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершину?
29. Что такое диагональное сечение пирамиды?
30. Как построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через данную прямую в плоскости основания пирамиды и данную точку на одной из боковых граней?
31. Докажите, что плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная ее основанию, отсекает от нее подобную пирамиду.
32. Объясните, что такое усеченная пирамида.
33. Какая пирамида называется правильной? Что такое ось правильной пирамиды?
34. Что такое апофема правильной пирамиды?
35. Докажите, что боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.
36. Какой многогранник называется правильным?
37. Перечислите пять типов правильных многогранников и опишите их.

ЗАДАЧИ

1. Из точек A и B, лежащих на гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найдите: 1) отрезок AB, если $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$

и двугранный угол равен α; 2) двугранный угол α, если $AA_1=3$, $BB_1=4$, $A_1B_1=6$, $AB=7$.

2. У трехгранного угла (abc) двугранный угол при ребре c прямой, двугранный угол при ребре b равен φ, а плоский угол (bc) равен $\gamma\left(\varphi,\ \gamma<\frac{\pi}{2}\right)$. Найдите два других плоских угла: $\alpha=\angle(ab)$, $\beta=\angle(ac)$.
3. У трехгранного угла один плоский угол равен γ, а каждый прилежащий к нему двугранный угол равен $\varphi\left(\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$. Найдите два других плоских угла α и угол β, образованный плоскостью угла γ с противолежащим ребром.
4.* У трехгранного угла два плоских угла острые и равны α, а третий угол равен γ. Найдите двугранные углы φ, противолежащие плоским углам α, и угол β между плоскостью γ и противолежащим ребром.
5. Докажите, что сечение призмы, параллельное основаниям, равно основаниям.
6. Сколько диагоналей имеет n-угольная призма?
7. Постройте сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону основания и одну из вершин другого основания.
8. Постройте сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки на боковых ребрах призмы.
9. Одно боковое ребро призмы перпендикулярно плоскости основания. Докажите, что другие боковые ребра также перпендикулярны плоскости основания.
10. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы 18 см. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.
11. Боковое ребро наклонной призмы равно 15 см и наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту призмы.
12.* В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 40 см. Найдите расстояние между большей боковой гранью и противолежащим боковым ребром призмы.
13. Основание призмы — правильный шестиугольник со стороной a, а боковые грани — квадраты. Найдите диагонали призмы и площади ее диагональных сечений.
14.* В правильной шестиугольной призме, боковые грани которой — квадраты, проведите плоскость через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания. Сторона основания равна a. Найдите площадь построенного сечения (рис. 117).

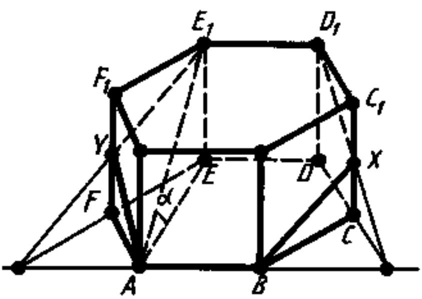


Рис. 117

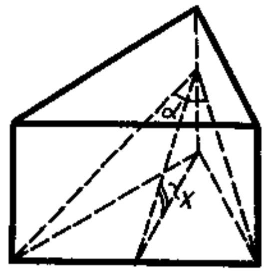


Рис. 118

15. Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая боковые грани по отрезкам, образующим угол α. Найдите угол наклона этой плоскости к основанию призмы (рис. 118).

16. В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, которая пересекает три боковых ребра и наклонена к плоскости основания под углом α. Сторона основания равна a. Найдите площадь полученного сечения.

17. В правильной четырехугольной призме площадь основания 144 см^2, а высота 14 см. Найдите диагональ призмы.

18. В правильной четырехугольной призме площадь боковой грани Q. Найдите площадь диагонального сечения.

19*. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15, высота равна 20. Найдите кратчайшее расстояние от стороны основания до диагонали призмы, не пересекающей ее (рис. 119).

20. В прямой треугольной призме все ребра равны. Боковая поверхность равна 12 м^2. Найдите высоту.

21. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы равна 32 м^2, а полная поверхность 40 м^2. Найдите высоту.

22*. В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите боковую поверхность призмы, если периметр сечения равен p, а боковые ребра равны l.

23. Расстояния между параллельными прямыми, содержащими боковые ребра наклонной треугольной призмы, равны 2 см, 3 см и 4 см, а боковые ребра 5 см. Найдите боковую поверхность призмы.

24. По стороне основания a и боковому ребру b найдите полную поверхность правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

25. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол 45°. Сторона основания l. Найдите боковую поверхность призмы.

26. В параллелепипеде три грани имеют площади 1 м^2, 2 м^2 и 3 м^2. Чему равна полная поверхность параллелепипеда?
27. Даны углы, образованные ребрами параллелепипеда, которые сходятся в одной вершине. Как найти углы между ребрами, сходящимися в любой другой вершине?
28. Докажите, что отрезок, соединяющий центры оснований параллелепипеда, параллелен боковым ребрам.
29. В прямом параллелепипеде стороны основания 6 м и 8 м образуют угол 30°; боковое ребро равно 5 м. Найдите полную поверхность этого параллелепипеда.
30. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 8 см; угол между ними 60°. Боковая поверхность равна 220 см^2. Найдите полную поверхность.
31. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 5 см, а одна из диагоналей основания 4 см. Найдите бо́льшую диагональ параллелепипеда, зная, что меньшая диагональ образует с плоскостью основания угол 60°.
32. Найдите диагонали прямого параллелепипеда, каждое ребро которого равно a, а один из углов основания равен 60°.
33.* Боковое ребро прямого параллелепипеда равно 5 м, стороны основания равны 6 м и 8 м, а одна из диагоналей основания равна 12 м. Найдите диагонали параллелепипеда.
34. В прямом параллелепипеде боковое ребро равно 1 м, стороны основания равны 23 дм и 11 дм, а диагонали основания относятся как 2 : 3. Найдите площади диагональных сечений.
35. Найдите диагонали прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 1) 1, 2, 2; 2) 2, 3, 6; 3) 6, 6, 7.

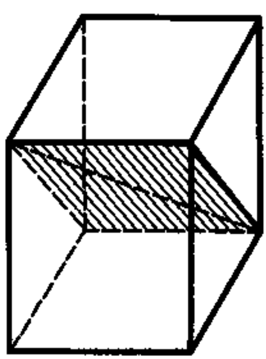


Рис. 119

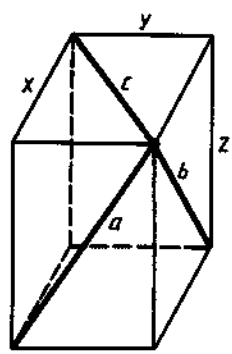


Рис. 120

36* Ребро куба равно a. Найдите расстояние от вершины куба до его диагонали, соединяющей две другие вершины.

37. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания 7 дм и 24 дм, а высота параллелепипеда 8 дм. Найдите площадь диагонального сечения.

38. Найдите поверхность прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 10 см, 22 см, 16 см.

39. Найдите боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, если его высота h, площадь основания Q, площадь диагонального сечения M.

40. Диагонали трех граней прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, равны a, b, c. Найдите линейные измерения параллелепипеда (рис. 120).

41. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, основание которого равно 12 см, а боковая сторона 10 см. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Найдите высоту пирамиды.

42. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислите высоту пирамиды.

43. Основанием пирамиды является правильный треугольник; одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом α. Как наклонены к плоскости основания боковые ребра?

44. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой a. Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол β. Найдите ее высоту.

45. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найдите высоту пирамиды.

46. Основание пирамиды — параллелограмм, стороны которого 3 см и 7 см, а одна из диагоналей 6 см, высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей и равна 4 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

47* Основание пирамиды — ромб с диагоналями 6 м и 8 м; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна 1 м. Найдите боковую поверхность пирамиды.

48. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник со сторонами 40 см, 25 см и 25 см. Ее высота проходит через вершину угла, противолежащего стороне 40 см, и равна 8 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

49. Основание пирамиды — квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Найдите боковую поверхность пирамиды, если сторона основания равна 20 дм, а высота 21 дм (рис. 121).

50. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и две данные точки на ее основании.

51. Постройте сечение треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания пирамиды и данную точку на противолежащем ребре.

52. Постройте сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и точку на одном из боковых ребер.

53. В четырехугольной усеченной пирамиде стороны одного основания равны 6, 7, 8, 9 см, а меньшая сторона другого основания равна 5 см. Найдите остальные стороны этого основания.

54. Боковое ребро пирамиды разделено на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 400 см^2. Найдите площади сечений.

55. Высота пирамиды равна 16 м. Площадь основания равна 512 м^2. На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное ему, если площадь сечения 50 м^2?

56. В правильной треугольной пирамиде с высотой h через сторону основания a проведена плоскость, пересекающая противолежащее боковое ребро под прямым углом. Найдите площадь сечения.

57. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания 8 см. Найдите боковое ребро.

58. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите двугранный угол x при основании пирамиды.

59. По данной стороне основания a и боковому ребру b найдите высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

60. По данной стороне основания a и высоте b найдите апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

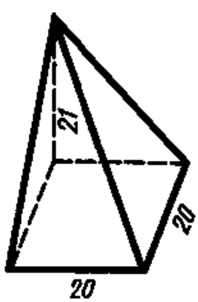


Рис. 121

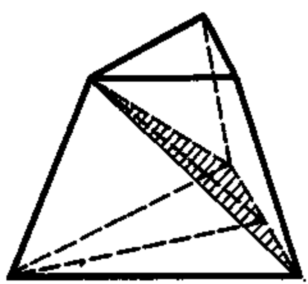


Рис. 122

61. По стороне основания a и высоте h найдите полную поверхность правильной пирамиды: 1) треугольной, 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.
62. Найдите полную поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если ее боковое ребро a, а радиус окружности, вписанной в основание, r.
63. В правильной четырехугольной пирамиде боковая поверхность равна 14,76 м^2, а полная поверхность 18 м^2. Найдите сторону основания и высоту пирамиды.
64. По стороне основания a найдите боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, диагональное сечение которой равновелико основанию.
65. Найдите боковую поверхность пирамиды, если площадь основания Q, а двугранные углы при основании φ.
66. Найдите двугранные углы при основании правильной пирамиды, площадь основания которой равна Q, а боковая поверхность S.
67. Найдите сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно 10 см, а боковая поверхность равна 144 см^2.
68. В правильной четырехугольной пирамиде найдите сторону основания, если боковое ребро равно 5 см, а полная поверхность 16 см^2.
69. Докажите, что боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.
70. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Стороны оснований равны 10 см и 2 см. Найдите боковое ребро пирамиды.
71. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды 4 дм и 1 дм. Боковое ребро 2 дм. Найдите высоту пирамиды.
72. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 2 см, а стороны оснований 3 см и 5 см. Найдите диагональ этой пирамиды.
73. Стороны оснований усеченной правильной треугольной пирамиды 2 см и 6 см. Боковая грань образует с бо́льшим основанием угол 60°. Найдите высоту.
74. В правильной усеченной треугольной пирамиде сторона большего основания a, сторона меньшего основания b. Боковое ребро образует с основанием угол 45°. Найдите площадь сечения, проходящего через боковое ребро и ось пирамиды[1].

[1] Ось правильной усеченной пирамиды совпадает с осью соответствующей полной пирамиды.

75. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4 см. Стороны оснований равны 2 см и 8 см. Найдите площади диагональных сечений.
76. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания 8 м, верхнего 5 м, а высота 3 м. Проведите сечение через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания. Найдите площадь сечения и двугранный угол между сечением и нижним основанием (рис. 122).
77. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований 8 м и 2 м. Высота равна 4 м. Найдите полную поверхность.
78. Найдите полную поверхность правильной усеченной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной, если высота h, а стороны оснований a и b.
79. Докажите, что центры граней куба являются вершинами октаэдра, а центры граней октаэдра являются вершинами куба.
80. Докажите, что концы двух непараллельных диагоналей противолежащих граней куба являются вершинами тетраэдра.
81. Найдите двугранные углы правильного тетраэдра.
82* Найдите двугранные углы октаэдра.
83. Какие плоскости симметрии имеет правильный тетраэдр?
84* Сколько плоскостей симметрии у правильного октаэдра, додекаэдра, икосаэдра?

§ 6. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

52. ЦИЛИНДР

Цилиндром (точнее, круговым цилиндром) называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов (рис. 123). Круги называются *основаниями цилиндра*, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов,— *образующими цилиндра*.

Так как параллельный перенос — это движение, то ***основания цилиндра равны***.

Поскольку при параллельном переносе плоскость переходит в параллельную плоскость (или в себя), то ***основания цилиндра лежат в параллельных плоскостях***.

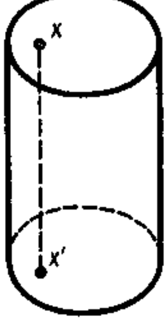


Рис. 123

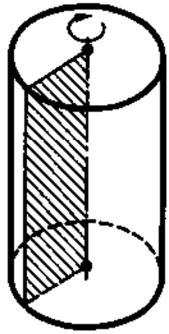


Рис. 124

Так как при параллельном переносе точки смещаются по параллельным прямым (или совпадающим) на одно и то же расстояние, то ***образующие цилиндра параллельны и равны.***

Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность — из образующих.

Цилиндр называется ***прямым***, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

В дальнейшем будем рассматривать только прямой цилиндр, называя его коротко просто цилиндром. Прямой цилиндр наглядно можно представить как тело, полученное в результате вращения прямоугольника вокруг стороны как оси (рис. 124).

Радиусом цилиндра называется радиус его основания. ***Высотой цилиндра*** называется расстояние между плоскостями его оснований. ***Осью цилиндра*** называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим.

53. СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА ПЛОСКОСТЯМИ

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, представляет собой прямоугольник (рис. 125). Две его стороны — образующие цилиндра, а две другие — параллельные хорды оснований. В частности, прямоугольником является ***осевое сечение.*** Это — сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось (рис. 126).

Задача (2). Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.

Решение. Сторона квадрата равна $\sqrt{Q}$. Она равна диаметру основания. Поэтому площадь основания равна $\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$.

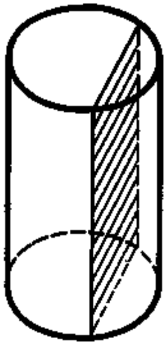


Рис. 125

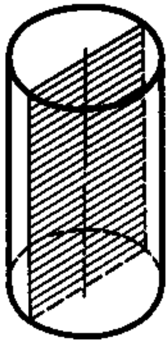


Рис. 126

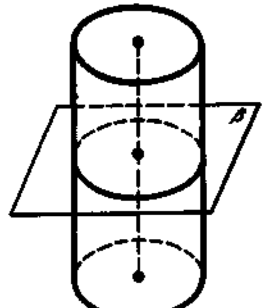


Рис. 127

Теорема 6.1. ***Плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.***

Доказательство. Пусть β — плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра (рис. 127). Параллельный перенос в направлении оси цилиндра, совмещающий плоскость β с плоскостью основания цилиндра, совмещает сечение боковой поверхности плоскостью β с окружностью основания. Теорема доказана.

54. ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ПРИЗМЫ

Призмой, вписанной в цилиндр, называется такая призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковыми ребрами — образующие цилиндра (рис. 128).

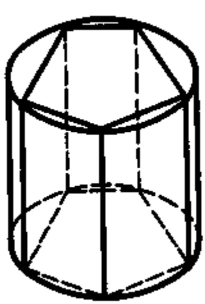


Рис. 128

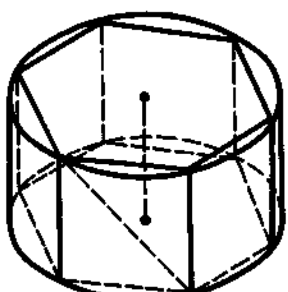


Рис. 129

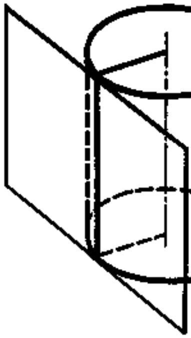


Рис. 130

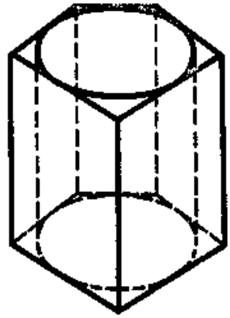


Рис. 131

Задача (7). В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.

Решение. Боковые грани призмы — квадраты, так как сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна радиусу (рис. 129). Ребра призмы параллельны оси цилиндра, поэтому угол между диагональю грани и осью цилиндра равен углу между диагональю и боковым ребром. А этот угол равен 45°, так как грани — квадраты.

Касательной плоскостью к цилиндру называется плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую (рис. 130).

Призмой, описанной около цилиндра, называется призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра (рис. 131).

55. КОНУС

Конусом (точнее, круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга — *основания конуса*, точки, не лежащей в плоскости этого круга,— *вершины конуса* и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания (рис. 132). Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются *образующими конуса*. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости

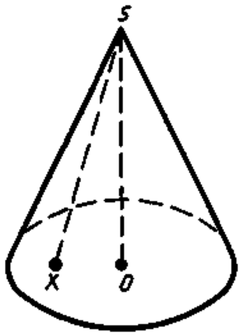


Рис. 132

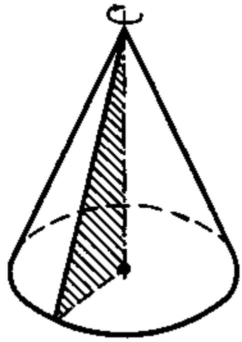


Рис. 133

основания. В дальнейшем будем рассматривать только прямой конус, называя его просто конусом. Наглядно прямой круговой конус можно представлять как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси (рис. 133).

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. *Осью прямого кругового конуса* называется прямая, содержащая его высоту.

56. СЕЧЕНИЯ КОНУСА ПЛОСКОСТЯМИ

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса (рис. 134). В частности, равнобедренным треугольником является осевое сечение конуса. Это сечение, которое проходит через ось конуса (рис. 135).

Теорема 6.2. ***Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.***

Доказательство. Пусть β — плоскость, параллельная плоскости основания конуса и пересекающая конус (рис. 136). Преобразование гомотетии относительно вершины конуса, совмещающее плоскость β с плоскостью основания, совмещает сечение конуса плоскостью β с основанием конуса. Следовательно, сечение конуса плоскостью есть круг, а сечение боковой поверхности — окружность с центром на оси конуса. Теорема доказана.

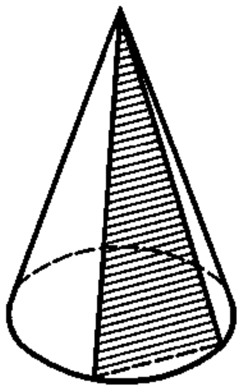


Рис. 134

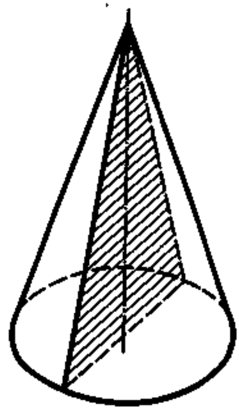


Рис. 135

Задача (15). Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.

Решение. Сечение конуса получаем из основания конуса преобразованием гомотетии относительно вершины конуса с коэффициентом гомотетии $k=\frac{d}{H}$. Поэтому радиус круга сечения $r=R\frac{d}{H}$. Следовательно, площадь сечения

$$S=\pi R^2\frac{d^2}{H^2}.$$

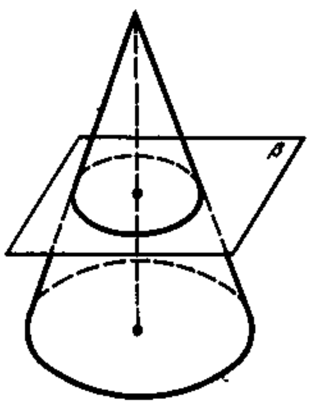


Рис. 136

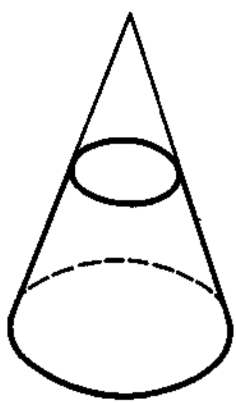


Рис. 137

Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется *усеченным конусом* (рис. 137).

57. ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ПИРАМИДЫ

Пирамидой, вписанной в конус, называется такая пирамида, основание которой многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса (рис. 138). Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса.

З а д а ч а (25). Все боковые ребра пирамиды равны. Докажите, что она вписана в некоторый конус.

Р е ш е н и е. Опустим перпендикуляр SO из вершины пирамиды на плоскость основания (рис. 139) и обозначим длину боковых ребер пирамиды через l. Вершины основания находятся от точки O на одном и том же расстоянии

$$R=\sqrt{l^2-OS^2}.$$

Отсюда следует, что наша пирамида вписана в конус, вершина которого является вершиной пирамиды, а основание — круг с центром O и радиусом R.

Касательной плоскостью к конусу называется плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная к плоскости осевого сечения, проведенного через эту образующую (рис. 140).

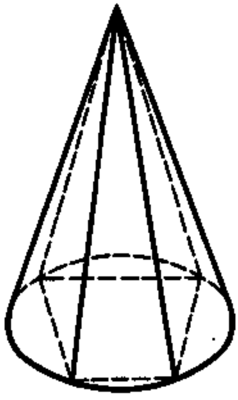


Рис. 138

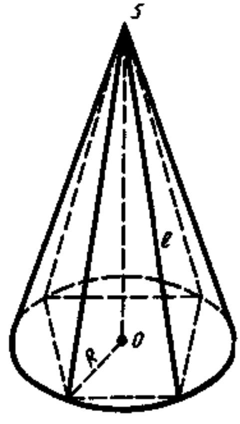


Рис. 139

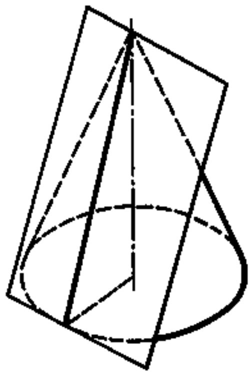


Рис. 140

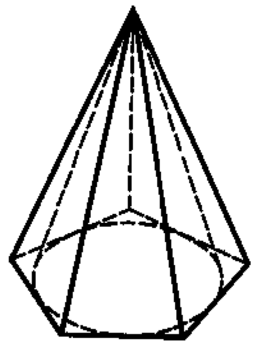


Рис. 141

Пирамидой, описанной около конуса, называется пирамида, в основании которой лежит многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 141). Плоскости боковых граней описанной пирамиды являются касательными плоскостями к конусу.

58. ШАР

Шаром называется тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не большем данного. Эта точка называется *центром шара*, а данное расстояние *радиусом шара*.

Граница шара называется *шаровой поверхностью*, или *сферо́й*. Таким образом, точками сферы являются все точки шара, которые находятся от центра на расстоянии, равном радиусу. Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, также называется радиусом.

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром*. Концы любого диаметра называются *диаметрально противоположными точками шара*.

Ша́р, так же как цилиндр и конус, является телом вращения. Он образуется вращением полукруга вокруг его диаметра как оси (рис. 142).

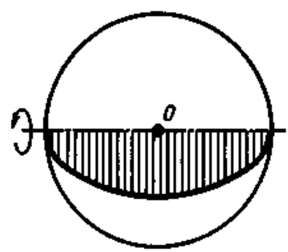


Рис. 142

59. СЕЧЕНИЕ ШАРА ПЛОСКОСТЬЮ

Теорема 6.3. ***Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга — основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.***

Доказательство. Пусть α — секущая плоскость и O — центр шара (рис. 143). Опустим перпендикуляр из центра шара на плоскость α и обозначим через O' основание этого перпендикуляра.

Пусть X — произвольная точка шара, принадлежащая плоскости α. По теореме Пифагора, $OX^2 = OO'^2 + O'X^2$. Так как OX не больше радиуса R шара, то $O'X \leqslant \sqrt{R^2 - OO'^2}$, то есть произвольная точка сечения шара плоскостью α находится от точки O' на расстоянии, не большем $\sqrt{R^2 - OO'^2}$, а потому принадлежит кругу с центром O' и радиусом $\sqrt{R^2 - OO'^2}$.

Обратно: любая точка X этого круга принадлежит шару. А это значит, что сечение шара плоскостью α есть круг с центром в точке O'. Теорема доказана.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной плоскостью*. Сечение шара диаметральной плоскостью называется *большим кругом* (рис. 144), а сечение сферы — *большой окружностью*.

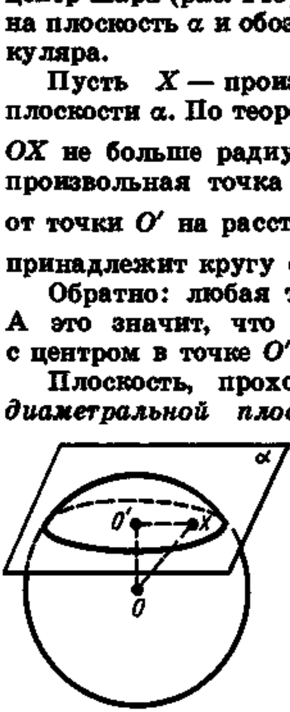


Рис. 143

Задача (30). Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

Решение. Если радиус шара R (рис. 145), то радиус круга

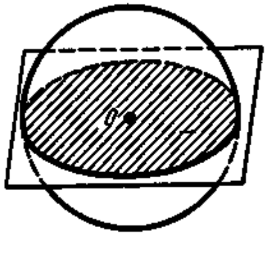


Рис. 144

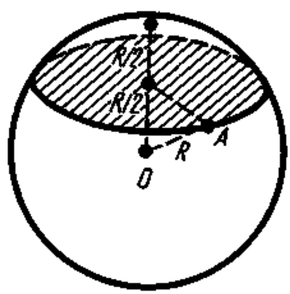


Рис. 145

в сечении будет $\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=R\sqrt{\frac{3}{4}}$. Отношение площади этого круга к площади большого круга равно

$$\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 : \pi R^2=\frac{3}{4}.$$

60. СИММЕТРИЯ ШАРА

Теорема 6.4. ***Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара — его центр симметрии.***

Доказательство. Пусть α — диаметральная плоскость и X — произвольная точка шара (рис. 146). Построим точку X', симметричную точке X относительно плоскости α.

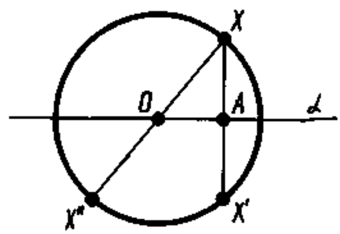


Рис. 146

Плоскость α перпендикулярна отрезку XX' и делит его пополам (в точке A). Из равенства прямоугольных треугольников OAX и OAX' следует, что $OX'=OX$.

Так как $OX \leqslant R$, то и $OX' \leqslant R$, то есть точка, симметричная точке X, принадлежит шару. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь X'' — точка, симметричная точке X относительно центра шара. Тогда $OX''=OX \leqslant R$, то есть точка X'' принадлежит шару. Теорема доказана полностью.

61. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ К ШАРУ

Плоскость, проходящая через точку A шаровой поверхности и перпендикулярная радиусу, проведенному в точку A, называется *касательной плоскостью*. Точка A называется *точкой касания* (рис. 147).

Теорема 6.5. ***Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.***

Доказательство. Пусть α — плоскость, касательная к шару, и A — точка касания (рис. 148). Возьмем произвольную точку X плоскости α, отличную от A.

Поскольку OA — перпендикуляр, а OX — наклонная, то $OX > OA = R$. Следовательно, точка X не принадлежит шару. Теорема доказана.

Прямая, принадлежащая касательной к шару плоскости и проходящая через точку касания, называется *касательной к шару* в этой точке. Так как касательная плоскость имеет

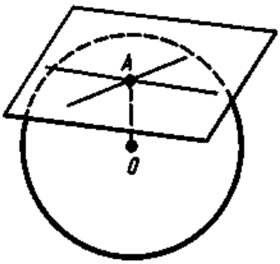


Рис. 147

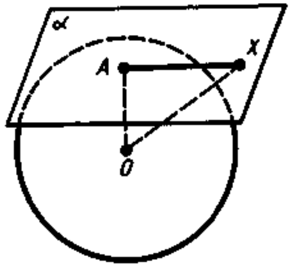


Рис. 148

с шаром только одну общую точку, то касательная прямая также имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.

Задача (39). Шар радиуса R касается всех сторон правильного треугольника со стороной a. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

Решение. Пусть A, B, C — точки касания шара со сторонами треугольника (рис. 149). Опустим из центра O шара перпендикуляр OO_1 на плоскость треугольника. Отрезки OA, OB и OC перпендикулярны сторонам. По теореме о трех перпендикулярах отрезки O_1A, O_1B, O_1C также перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника.

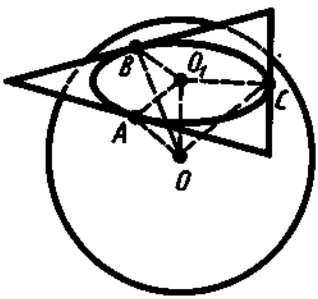


Рис. 149

Из равенства прямоугольных треугольников OO_1A, OO_1B, OO_1C (у них катет общий, а гипотенузы равны радиусу) следует равенство сторон: $O_1A = O_1B = O_1C$. Следовательно, O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник. Радиус этой окружности, как мы знаем, равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. По теореме Пифагора находим искомое расстояние. Оно равно $\sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$.

62. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ДВУХ СФЕР

Теорема 6.6. *Линия пересечения двух сфер есть окружность.*

Доказательство. Пусть O_1 и O_2 — центры сфер и A — их точка пересечения (рис. 150). Проведем через точку A плоскость α, перпендикулярную прямой O_1O_2.

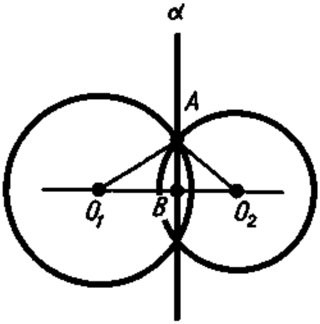


Рис. 150

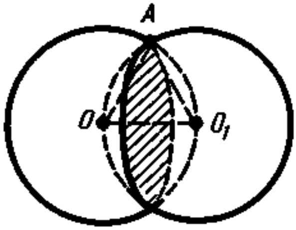


Рис. 151

Обозначим через B точку пересечения плоскости α с прямой O_1O_2. По теореме 6.3 плоскость α пересекает обе сферы по окружности K с центром B, проходящей через точку A. Таким образом, окружность K принадлежит пересечению сфер.

Покажем теперь, что сферы не имеют других точек пересечения, кроме точек окружности K. Допустим, что точка X пересечения сфер не лежит на окружности K. Проведем плоскость через точку X и прямую O_1O_2. Она пересечет сферы по окружностям с центрами O_1 и O_2. Эти окружности пересекаются в двух точках, принадлежащих окружности K, и еще в точке X, но две окружности не могут иметь больше двух точек пересечения. Мы пришли к противоречию. Таким образом, пересечением наших сфер есть окружность (K). Теорема доказана.

Задача (44). Два равных шара радиуса R размещены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

Решение. Проведем сечение через центры шаров (рис. 151). Линия, о которой идет речь в задаче,— окружность (теорема 6.6). Ее радиус равен высоте равностороннего треугольника OAO_1 со сторонами, равными R. Высота равна $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, длина линии равна $\pi R\sqrt{3}$.

63. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Многогранник называется *вписанным в шар*, если все его вершины лежат на поверхности шара. Многогранник называется *описанным около шара*, если все его грани касаются поверхности шара.

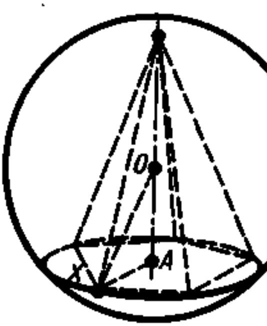


Рис. 152

Задача (47). Докажите, что центр шара, описанного около правильной пирамиды, лежит на ее оси.

Решение. Опустим перпендикуляр OA из центра шара O на плоскость основания пирамиды (рис. 152). Пусть X — произвольная вершина основания пирамиды. По теореме Пифагора $AX^2=OX^2-OA^2=R^2-OA^2$. Таким образом, AX одно и то же для любой вершины основания пирамиды. А это значит, что точка A является центром окружности, описанной около основания пирамиды. Следовательно, центр шара O лежит на оси пирамиды.

64. О ПОНЯТИИ ТЕЛА И ЕГО ПОВЕРХНОСТИ В ГЕОМЕТРИИ

В предыдущем изложении материала мы неоднократно использовали выражения — *тело* и *поверхность тела*, вкладывая в их содержание знакомые вам наглядные представления. Теперь дадим определение геометрического тела и его поверхности.

Точка фигуры называется *внутренней*, если существует шар с центром в этой точке, который полностью принадлежит этой фигуре. Фигура называется *областью*, если все ее точки внутренние и любые две ее точки можно соединить ломаной, полностью принадлежащей фигуре. Поясним данное определение на примере шара (рис. 153).

Каждая точка шара, отстоящая от его центра на расстояние r, меньшее R, есть внутренняя точка шара, так как шар с центром в этой точке и радиусом $R-r$ содержится в исходном шаре радиуса R. Все точки шара, отстоящие от центра на расстояние, меньшее R, образуют область. Действительно, любые такие две точки A и B соединяются отрезком AB, все точки которого отстоят от центра на расстояние, меньшее R.

Точка пространства называется *граничной точкой* данной фигуры, если любой шар с центром в этой точке содержит как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, не принадлежащие ей. Для шара граничными точками являются точки, отстоящие от точки O на расстоянии, равном R, то есть границей шара есть сфера. Для каждой такой точки C можно указать в каждом шаре с центром C и радиусом $r>0$ точки C_1 и C_2, отстоящие

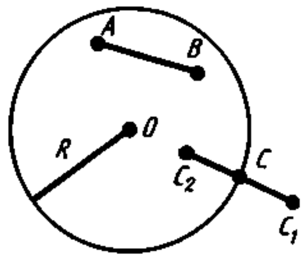


Рис. 153

от точки O на расстоянии, большем R, и на расстоянии, меньшем R.

Область вместе с ее границей называется *замкнутой областью.*

Телом называется конечная замкнутая область. Граница тела называется *поверхностью тела.* Шар — пример тела. Другими примерами тел являются многогранник, цилиндр и конус.

Подобно тому как в пространстве, на плоскости вводятся понятия внутренней точки фигуры, граничной точки и области. Граничные точки области образуют границу области. В круге радиуса R точки, находящиеся на расстоянии, меньшем R, от центра,— внутренние, а точки, находящиеся на расстоянии R,— граничные. Круг — замкнутая область.

Плоский многоугольник — это ограниченная замкнутая область на плоскости, границей которой является многоугольник.

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объясните, что такое круговой цилиндр (образующая цилиндра, основания цилиндра, боковая поверхность цилиндра).
2. Какой цилиндр называется прямым?
3. Что такое радиус цилиндра, высота цилиндра, ось цилиндра, осевое сечение цилиндра?
4. Докажите, что плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.
5. Что такое призма, вписанная в цилиндр (описанная около цилиндра)? Что такое касательная плоскость к цилиндру?
6. Что такое круговой конус, вершина конуса, образующая конуса, основание конуса, боковая поверхность конуса?
7. Какой конус называется прямым?
8. Что такое высота конуса, ось конуса, осевое сечение конуса?
9. Докажите, что плоскость, палаллельная плоскости основания конуса, пересекает боковую поверхность по окружности с центром на оси конуса.
10. Что такое усеченный конус?
11. Какая пирамида называется вписанной в конус (описанной около конуса)? Что такое касательная плоскость к конусу?
12. Что такое шар (шаровая поверхность или сфера)?

13. Что такое радиус шара, диаметр шара? Какие точки шара называются диаметрально противоположными?
14. Докажите, что пересечение шара с плоскостью есть круг.
15. Какая плоскость называется диаметральной плоскостью шара? Что такое большой круг?
16. Докажите, что любая диаметральная плоскость шара является плоскостью его симметрии. Центр шара есть его центром симметрии.
17. Какая плоскость называется касательной к шару?
18. Докажите, что касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.
19. Какая прямая называется касательной к шару?
20. Докажите, что линия пересечения двух сфер — окружность.
21. Какой многогранник называется вписанным в шар (описанным около шара)?

ЗАДАЧИ

1. Радиус основания цилиндра 2 м, высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.
2. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.
3. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.
4. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси (рис. 154).
5. Высота цилиндра 6 дм, радиус основания 5 дм. Концы отрезка AB длиной 10 дм лежат на окружностях обоих оснований. Найдите кратчайшее расстояние от него до оси.

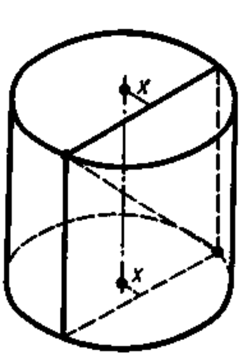


Рис. 154

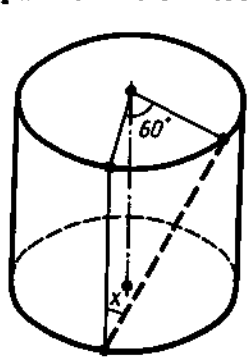


Рис. 155

6. В равностороннем цилиндре (диаметр равен высоте цилиндра) точка окружности верхнего основания соединена с точкой окружности нижнего основания. Угол между радиусами, проведенными в эти точки, равен 60°. Найдите угол x между проведенной прямой и осью цилиндра (рис. 155).
7. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.
8. Высота цилиндра 2 м. Радиус оснований 7 м. В этот цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все вершины его лежат на окружностях оснований. Найдите сторону квадрата (рис. 156).
9. Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найдите образующую.
10. Образующая конуса l наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту.
11. Радиус основания конуса R. Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник. Найдите его площадь.
12. В равностороннем конусе (в осевом сечении — правильный треугольник) радиус основания R. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен α (рис. 157).
13. Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если расстояние от него до центра основания конуса равно 12.
14. Радиус основания конуса R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом φ к его высоте. Найдите площадь полученного сечения.
15. Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.

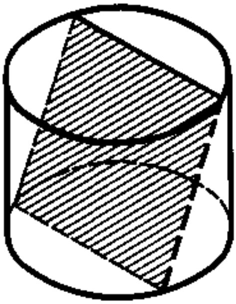


Рис. 156

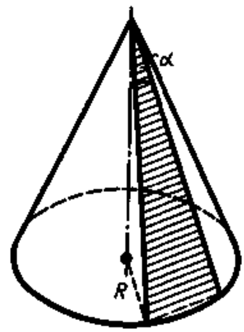


Рис. 157

16. Высота конуса H. На каком расстоянии от вершины нужно провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?

17. Через середину высоты конуса проведена прямая параллельно образующей l. Найдите длину отрезка прямой, находящегося внутри конуса.

18* Образующая конуса 13 см, высота 12 см. Конус пересечен прямой, параллельной основанию; расстояние от нее до основания равно 6 см, а до высоты — 2 см. Найдите отрезок этой прямой, находящийся внутри конуса (рис. 158).

19. Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 6 м, высота 4 м. Найдите образующую.

20. Радиусы оснований усеченного конуса R и r, образующая наклонена к основанию под углом 45°. Найдите высоту.

21. Образующая усеченного конуса равна $2a$ и наклонена к основанию под углом 60°. Радиус одного основания вдвое больше радиуса другого основания. Найдите каждый из радиусов.

22. Радиусы оснований усеченного конуса 3 дм и 7 дм, образующая 5 дм. Найдите площадь осевого сечения.

23. Площади оснований усеченного конуса 4 дм^2 и 16 дм^2. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основаниям. Найдите площадь сечения.

24. Площади оснований усеченного конуса M и m. Найдите площадь среднего сечения, параллельного основаниям.

25. Все боковые ребра пирамиды равны. Докажите, что она вписана в некоторый конус.

26* В конусе даны радиус основания R и высота H. Найдите ребро вписанного в него куба (рис. 159).

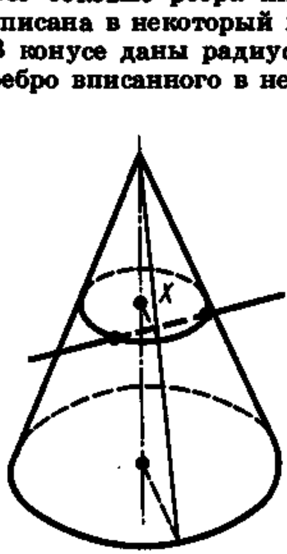


Рис. 158

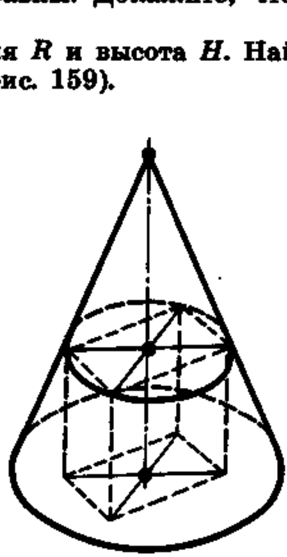


Рис. 159

27* В конусе даны радиус основания R и высота H. В него вписана правильная треугольная призма, боковые грани которой — квадраты. Найдите ребро призмы.

28. Полушар и вписанный в него конус имеют общее основание и общую высоту. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Докажите, что площадь сечения, находящегося между боковой поверхностью конуса и поверхностью полушара, равна половине площади основания (рис. 160).

29. Шар, радиус которого 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.

30. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

31. Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения.

32. Радиус земного шара R. Чему равна длина параллели, если ее широта 60° (рис. 161)?

33. Город N находится на 60° северной широты. Какой путь совершает этот пункт за 1 ч вследствие вращения Земли вокруг своей оси? Радиус Земли принять равным 6 000 км.

34. На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними 6 см, 8 см, 10 см. Радиус шара 13 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти точки.

35. Диаметр шара 25 см. На его поверхности даны точка A и окружность, все точки которой находятся (по прямой линии) на расстоянии 15 см от A. Найдите радиус этой окружности.

36* Радиус шара 7 см. На его поверхности даны две равные окружности, имеющие общую хорду длиной 2 см. Найдите радиусы окружностей, зная, что их плоскости перпендикулярны (рис. 162).

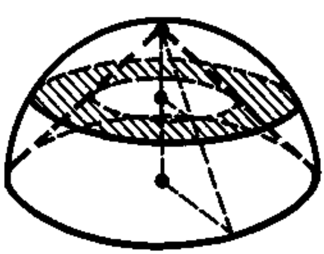


Рис. 160

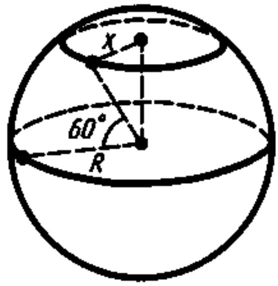


Рис. 161

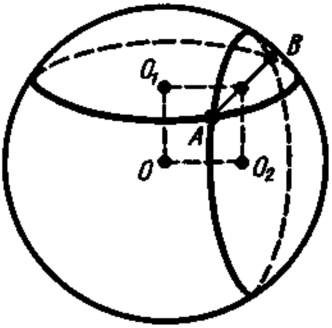


Рис. 162

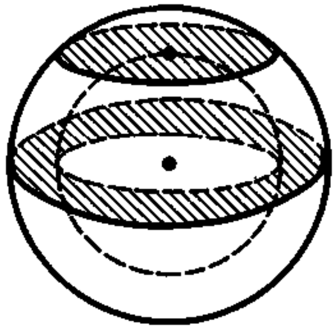


Рис. 163

37. Дан шар радиуса R. Через одну точку его поверхности проведены две плоскости: одна — касательная к шару, другая — под углом 30° к первой. Найдите площадь сечения.
38. Тело ограничено двумя концентрическими шаровыми поверхностями (полый шар). Докажите, что его сечение плоскостью, проходящей через центр, равновелико сечению, касательному к внутренней шаровой поверхности (рис. 163).
39. Шар радиуса R касается всех сторон правильного треугольника со стороной a. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.
40. Стороны треугольника 13 см, 14 см и 15 см. Найдите расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касающегося всех сторон треугольника. Радиус шара 5 см.
41. Диагонали ромба 15 см и 20 см. Шаровая поверхность касается всех его сторон. Радиус шара 10 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба.
42. Через касательную к поверхности шара проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, пересекающие шар по кругам радиусов r_1 и r_2. Найдите радиус шара R.
43. Шар радиуса R вписан в усеченный конус. Угол наклона образующей к плоскости нижнего основания конуса равен α. Найдите радиусы оснований и образующую усеченного конуса.
44. Два равных шара радиуса R размещены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.
45. Радиусы шаров равны 25 дм и 29 дм, а расстояние между их центрами 36 дм. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.
46. Найдите радиус шара, описанного около куба со стороной a.

47. Докажите, что центр шара, описанного около правильной пирамиды, лежит на ее оси.
48. Докажите, что центр шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит на ее высоте.
49. Найдите радиус шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром a.
50. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а плоский угол при вершине равен α. Найдите радиусы вписанного и описанного шаров.
51.* В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоскими углами α при ее вершине. Найдите высоту пирамиды.
52. Правильная n-угольная призма вписана в шар радиуса R. Ребро основания призмы равно a. Найдите высоту призмы, если: 1) $n=3$; 2) $n=4$; 3) $n=6$.
53. Сторона основания правильной n-угольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен φ. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.
54. Найдите радиус шара, описанного около правильной n-угольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

§ 7. ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

65. ПОНЯТИЕ ОБЪЕМА

Так же как для фигур на плоскости вводится понятие площади, для тел в пространстве вводится понятие объема. Сначала рассмотрим только простые тела. Тело называется *простым*, если его можно разбить на конечное количество треугольных пирамид.

Для простых тел *объем — это положительная величина, численное значение которой имеет такие свойства:*

1. *Равные тела имеют равные объемы.*

2. *Если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей.*

3. *Объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.*

Если куб, о котором идет речь в определении, имеет ребро 1 см, то объем будет в кубических сантиметрах; если ребро куба равно 1 м, то — в кубических метрах; если ребро куба равно 1 км, то объем — в кубических километрах и т. д.

Примером простого тела является любой выпуклый многогранник. Его можно разбить на конечное число треугольных

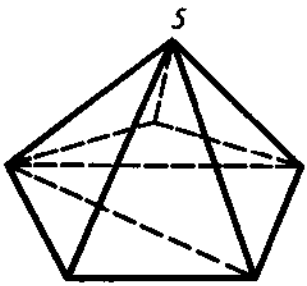


Рис. 164

пирамид следующим образом. Возьмем какую-нибудь вершину S многогранника. Разобьем на треугольники все грани многогранника, не содержащие вершину S. Тогда треугольные пирамиды, для которых основаниями являются эти треугольники, а общей вершиной — точка S, дают разбиение многогранника на треугольные пирамиды. На рисунке 164 показано такое разбиение для произвольной пирамиды.

66. ОБЪЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Найдем объем прямоугольного параллелепипеда с линейными размерами a, b, c. Для этого сначала докажем, что объемы двух прямоугольных параллелепипедов с равными основаниями относятся как их высоты.

Пусть P и P_1 — два прямоугольных параллелепипеда с общим основанием $ABCD$ и высотами AE и AE_1 (рис. 165). Будем считать для определенности, что $AE_1 < AE$. Пусть V и V_1 — объемы параллелепипедов. Разобьем ребро AE параллелепипеда P на большое число n равных частей. Каждая из них равна $\frac{AE}{n}$. Пусть m — количество точек деления, лежащих на ребре AE_1. Тогда

$$\left(\frac{AE}{n}\right)m \leqslant AE_1 \leqslant \left(\frac{AE}{n}\right)(m+1).$$

Отсюда

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{AE_1}{AE} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (*)$$

Проведем через точки деления плоскости, параллельные основанию. Они разобьют параллелепипед P на n равных параллелепипедов. Каждый из них имеет объем $\frac{V}{n}$. Параллелепипед P_1 содержит первые m параллелепипедов, считая снизу, и содержится в $m+1$ параллелепипедах. Поэтому

$$\left(\frac{V}{n}\right)m \leqslant V_1 \leqslant \left(\frac{V}{n}\right)(m+1).$$

Отсюда

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{V_1}{V} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (**)$$

Из неравенств (*) и (**) видим, что оба числа $\frac{V_1}{V}$ и $\frac{AE_1}{AE}$ находятся между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$. Поэтому они отличаются не более чем на $\frac{1}{n}$. А так как n можно взять сколько угодно большим, то это возможно только тогда, когда $\frac{V_1}{V}=\frac{AE_1}{AE}$, что и требовалось доказать.

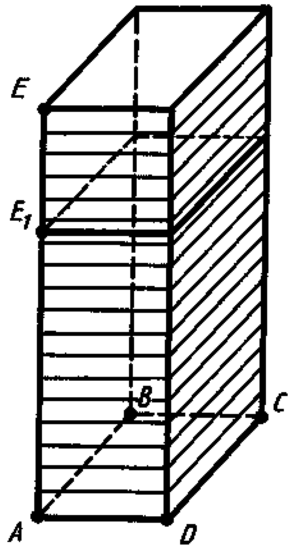


Рис. 165

Возьмем теперь куб, являющийся единицей измерения объема, и три прямоугольных параллелепипеда с измерениями: a, 1, 1; a, b, 1; a, b, c. Обозначим их объемы V_1, V_2 и V соответственно. По доказанному

$$\frac{V_1}{1}=\frac{a}{1},\ \frac{V_2}{V_1}=\frac{b}{1},\ \frac{V}{V_2}=\frac{c}{1}.$$

Перемножив эти три равенства почленно, получим:

$$V=abc.$$

Итак, ***объем прямоугольного параллелепипеда с линейными размерами a, b, c вычисляется по формуле $V=abc$.***

Задача (3). Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Чему равно ребро куба?

Решение. Обозначим ребро куба через x; тогда $(x+2)^3-x^3=98$, то есть $x^2+2x-15=0$. Уравнение имеет два корня $x=3$, $x=-5$. Геометрический смысл имеет только положительный корень. Значит, ребро куба равно 3 см.

67. ОБЪЕМ НАКЛОННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Найдем объем наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 166).

Проведем через ребро BC плоскость, перпендикулярную основанию $ABCD$, и дополним наклонный параллелепипед треугольной призмой $BB_1B_2CC_1C_2$ (рис. 166, *а*). Отсечем от полученного тела треугольную призму плоскостью, проходящей через ребро AD и перпендикулярной основанию $ABCD$. Тогда снова получим параллелепипед. Объем этого параллелепипеда равен объему начального параллелепипеда.

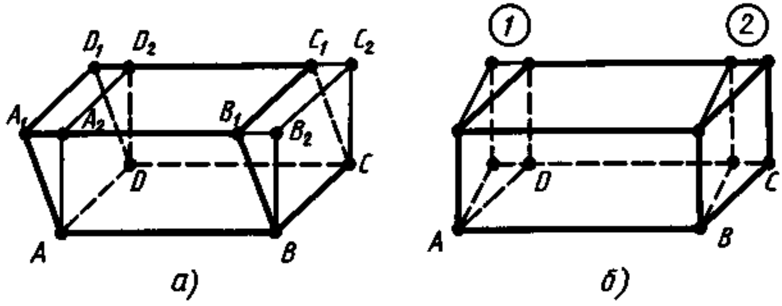


Рис. 166

Действительно, достроенная призма и отсекаемая совмещаются параллельным переносом на отрезок AB, следовательно, имеют одинаковые объемы. При таком преобразовании параллелепипеда сохраняются площадь его основания и высота. Сохраняются также плоскости двух боковых граней, а две другие становятся перпендикулярными основанию.

Применив еще раз такое преобразование к наклонным граням, получим параллелепипед со всеми боковыми гранями, перпендикулярными основанию, то есть прямой параллелепипед.

Полученный прямой параллелепипед преобразуем аналогично в прямоугольный параллелепипед, дополняя его сначала призмой 1, а затем отсекая призму 2 (рис. 166, *б*). Это преобразование также сохраняет объем параллелепипеда, площадь основания и высоту.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений. Произведение двух измерений является площадью основания параллелепипеда, а третье измерение — его высота.

Таким образом, объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту. Так как при описанном выше преобразовании данного параллелепипеда в прямоугольный каждый раз сохраняются объем, площадь основания и высота, то и объем начального параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Итак, ***объем любого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.***

Рис. 167

З а д а ч а (11). В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол $30°$. Боковая поверхность равна S. Найдите его объем.

Решение. Обозначим высоту через x (рис. 167). Тогда $(2a+2b)\,x=S$. Отсюда $x=\frac{S}{2(a+b)}$. Площадь основания параллелепипеда равна $ab\sin 30^\circ=\frac{ab}{2}$. Объем равен $\frac{S}{4(a+b)}$.

68. ОБЪЕМ ПРИЗМЫ

Рассмотрим сначала треугольную призму (рис. 168). Дополним ее до параллелепипеда, как показано на рисунке. Точка O является центром симметрии параллелепипеда. Поэтому достроенная призма симметрична данной относительно точки O, следовательно, имеет объем, равный объему данной призмы. Таким образом, объем построенного параллелепипеда равен удвоенному объему данной призмы.

Объем параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту. Площадь его основания равна удвоенной площади треугольника ABC, а высота равна высоте данной призмы. Отсюда следует, что объем данной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Рассмотрим теперь произвольную призму (рис. 169). Разобьем ее основание на треугольники. Пусть Δ — один из этих треугольников. Проведем через произвольную точку X треугольника Δ прямую, параллельную боковым ребрам. Пусть a_x — отрезок этой прямой, принадлежащий призме. Когда точка X описывает треугольник Δ, отрезки a_x заполняют

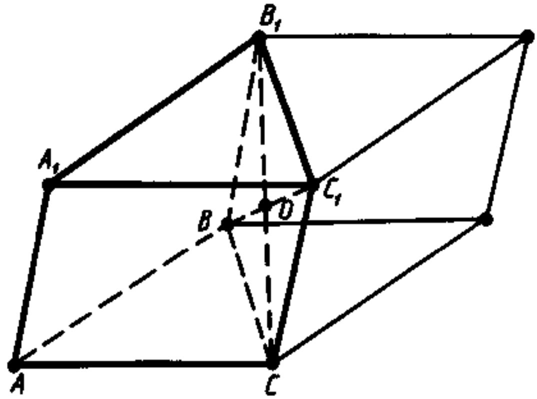


Рис. 168

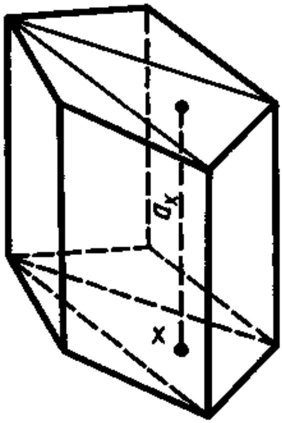


Рис. 169

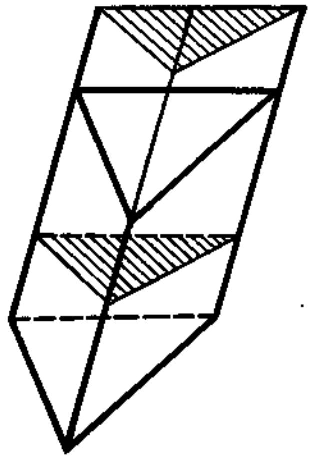


Рис. 170

треугольную призму. Построив такую призму для каждого треугольника $\triangle$, получим разбиение данной призмы на треугольные. Все эти призмы имеют одну и ту же высоту, равную высоте данной призмы.

Объем данной призмы равен сумме объемов треугольных призм, из которых она состоит. По доказанному объем треугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту. Отсюда следует, что объем данной призмы равен:

$$V = S_1H + S_2H + \dots + S_nH = (S_1 + S_2 + \dots + S_n)H,$$

где S_1, S_2, ..., S_n — площади треугольников, на которые разбито основание призмы, а H — высота призмы. Сумма площадей треугольников равна площади S основания данной призмы. Поэтому

$$V = SH.$$

Итак, ***объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.***

З а д а ч а (24). В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите объем призмы, если площадь сечения Q, а боковые ребра равны l.

Р е ш е н и е. Плоскость проведенного сечения разбивает призму на две части (рис. 170). Применим к одной из них параллельный перенос, совмещающий основания призмы. При этом получим прямую призму, у которой основанием является сечение данной призмы, а высота равна l. Эта призма имеет такой же объем. Таким образом объем данной призмы равен Ql.

69. РАВНОВЕЛИКИЕ ТЕЛА

Два тела называются *равновеликими*, если они имеют равные объемы.

Две треугольные пирамиды с равными площадями оснований и равными высотами равновелики.

Действительно, пусть треугольные пирамиды имеют равные площади оснований и равные высоты. Докажем, что они равновелики, то есть имеют равные объемы.

Разделим высоту каждой пирамиды на n равных частей и проведем через точки деления плоскости, параллельные основаниям. Эти плоскости разбивают пирамиду на n слоев. Для каждого слоя первой пирамиды построим призму, содержащуюся в нем, как показано на рисунке 171, *а*. Для каждого слоя второй пирамиды построим призму, содержащую слой (рис. 171, *б*). Призма в k-м (считая от вершины) слое первой пирамиды и призма, содержащая $(k-1)$-й слой второй пирамиды, имеют равные площади оснований, так как эти основания подобны основаниям пирамид и коэффициент подобия один

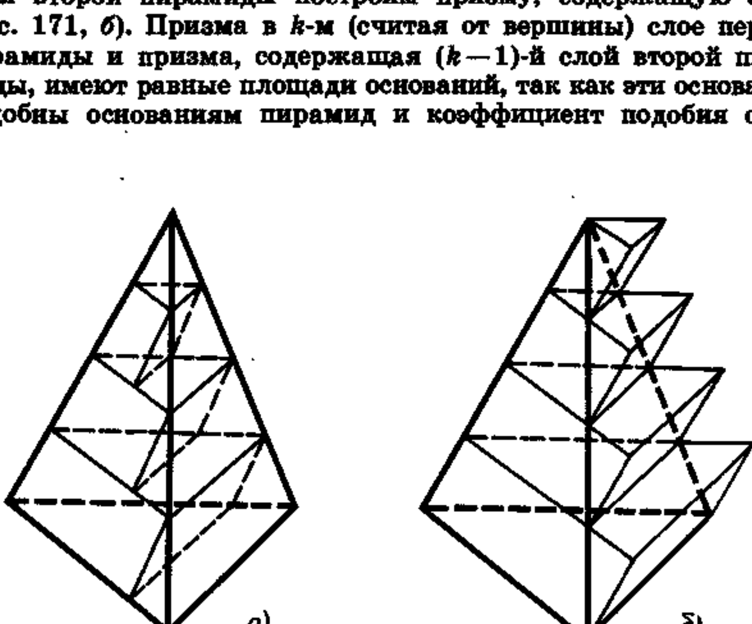


Рис. 171

и тот же $\left(\frac{k}{n}\right)$. Так как у этих призм и высоты одинаковые $\left(\frac{H}{n}\right)$, то они имеют равные объемы.

Пусть V_1 и V_2 — объемы пирамид, а V_1' и V_2' — суммы объемов построенных для них призм. Так как объем призмы в k-м слое первой пирамиды равен объему призмы $(k-1)$-го слоя второй пирамиды, то сумма объемов всех призм для первой пирамиды равна сумме объемов призм всех слоев второй пирамиды, кроме последнего. Объем призмы последнего слоя равен $S\frac{H}{n}$, где S — площадь основания пирамиды, а H — высота. Отсюда следует, что $V_1'=V_2'-S\frac{H}{n}$. Так как, кроме того, $V_1>V_1'$, а $V_2<V_2'$, то $V_1>V_2-\frac{SH}{n}$, или $V_2-V_1\leqslant\frac{SH}{n}$. Это неравенство выполняется при любом сколь угодно большом n. А это возможно только, когда $V_2-V_1\leqslant 0$, то есть, когда $V_2\leqslant V_1$. Поменяв ролями пирамиды, получим противоположное неравенство $V_2\geqslant V_1$. А отсюда следует, что $V_1=V_2$. Утверждение доказано.

70. ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

Пусть $SABC$ — треугольная пирамида с вершиной S и основанием ABC. Дополним эту пирамиду до треугольной призмы с тем же основанием и высотой, как показано на рисунке 172. Эта призма состоит из трех пирамид: данной пирамиды $SABC$ и еще из двух треугольных пирамид SCC_1B_1 и $SCBB_1$.

Вторая и третья пирамиды имеют равные основания $\triangle CC_1B_1$ и $\triangle B_1BC$ и общую высоту, проведенную из вершины S. Поэтому у них равные объемы.

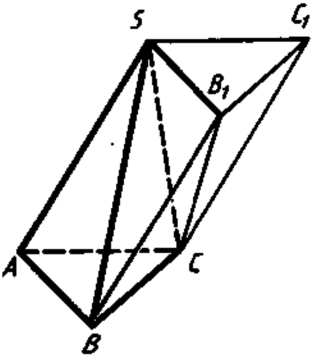


Рис. 172

В первой и третьей пирамидах также равны основания $\triangle SAB$ и $\triangle BB_1S$ и высоты, проведенные из вершины C, совпадают. Поэтому у них тоже равны объемы.

Значит, все три пирамиды имеют один и тот же объем. Так как сумма этих объемов равна объему призмы, то объемы пирамид равны $\frac{SH}{3}$.

Итак, ***объем любой треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту:***

$$V=\frac{1}{3}SH.$$

Пусть теперь имеем любую, не обязательно треугольную пирамиду. Разобьем ее основание на треугольники $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_n$. Пирамиды, основаниями которых являются эти треугольники, а вершинами — вершина данной пирамиды, образуют данную пирамиду. Объем данной пирамиды равен сумме объемов составляющих ее пирамид. Так как все они имеют одну и ту же высоту H, что и данная пирамида, то объем ее равен:

$$V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\ldots+S_n)=\frac{1}{3}SH.$$

Итак, ***объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.***

71. ОБЪЕМ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ

Задача (44). Найдите объем усеченной пирамиды с площадями оснований Q_1 и Q_2 $(Q_1>Q_2)$ и высотой h.

Решение. Дополним данную усеченную пирамиду до полной (рис. 173). Пусть x — ее высота. Объем усеченной пирамиды равен разности объемов двух полных пирамид: одной с площадью основания Q_1 и высотой x, другой — с площадью основания Q_2 и высотой $x-h$.

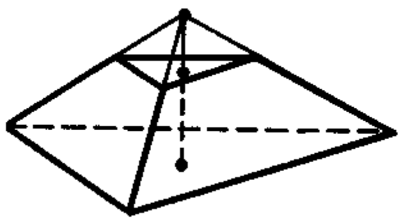


Рис. 173

Из подобия этих пирамид находим x: $\frac{Q_1}{Q_2}=\left(\frac{x}{x-h}\right)^2$.

Отсюда $x=\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}$. Объем усеченной пирамиды равен:

$$V=\frac{1}{3}\left(Q_1\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}-Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}-h\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}h\,\frac{Q_1\sqrt{Q_1}-Q_2\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}=\frac{1}{3}h\,(Q_1+\sqrt{Q_1Q_2}+Q_2).$$

72. ОБЪЕМЫ ПОДОБНЫХ ТЕЛ

Пусть T и T' — два простых подобных тела. Это значит, что существует преобразование подобия, которое переводит тело T в тело T'. Обозначим через k коэффициент подобия.

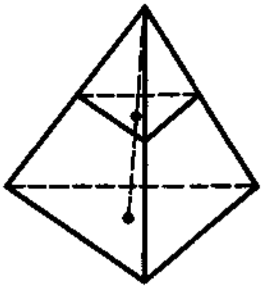


Рис. 174

Разобьем тело T на треугольные пирамиды P_1, P_2, ..., P_n. Преобразование подобия, которое переводит тело T в тело T'; переводит пирамиды P_1, P_2, ..., P_n в пирамиды P'_1, P'_2, ..., P'_n. Эти пирамиды образуют тело T', а потому объем тела T' равен сумме объемов пирамид P'_1, P'_2, ..., P'_n.

Так как пирамиды P'_i и P_i подобны и коэффициент подобия равен k, то отношение их высот равно k, а отношение площадей их оснований равно k^2. Следовательно, отношение объемов пирамид равно k^3. Так как тело T состоит из пирамид P_i, а тело T' — из пирамид P'_i, то отношение объемов тел T' и T также равно k^3.

Число k — коэффициент подобия — равен отношению расстояний между любыми двумя соответствующими парами точек при преобразовании подобия. Значит, это число равно отношению любых двух соответствующих линейных размеров тел T' и T. Таким образом, делаем вывод:

Объемы двух подобных тел относятся, как кубы их соответствующих линейных размеров.

Задача (48). Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. В каком отношении она делит объем пирамиды?

Решение. Как мы знаем, проведенная плоскость отсекает подобную пирамиду (рис. 174). Коэффициент подобия равен отношению высот, то есть $\frac{1}{2}$. Поэтому объемы пирамид относятся как $\left(\frac{1}{2}\right)^3:1$. Следовательно, плоскость делит данную пирамиду на части, объемы которых относятся как $\frac{1}{8}:\left(1-\frac{1}{8}\right)=1:7$.

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте основные свойства объема.
2. Докажите, что объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его линейных размеров.
3. Докажите, что объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.
4. Докажите, что объем треугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

5. Докажите, что объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.
6. Докажите, что треугольные пирамиды с равными площадями оснований и равными высотами равновелики.
7. Выведите формулу для объема треугольной пирамиды.
8. Докажите, что объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.
9. Докажите, что объемы подобных тел относятся как кубы соответствующих линейных размеров.

ЗАДАЧИ

1. Три латунных куба с ребрами 3 см, 4 см и 5 см переплавили в один куб. Какое ребро этого куба?
2. Металлический куб имеет внешнее ребро 10,2 см и массу 514,15 г. Толщина стенок равна 0,1 см. Найдите плотность металла, из которого сделан куб.
3. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Какова длина ребра куба?
4. Если каждое ребро куба увеличить на 1 м, то его объем увеличится в 125 раз. Найдите ребро.
5. Кирпич размером $25 \times 12 \times 6{,}5$ см имеет массу 3,51 кг. Какая его плотность?
6. Требуется установить резервуар для воды емкостью 10 м^3 на площадке размером $2{,}5 \times 1{,}75$ м, который служит для него дном. Найдите высоту резервуара.
7. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м и 36 м. Найдите ребро равновеликого ему куба.
8. Измерения прямоугольного бруска 3 см, 4 см и 5 см. Если увеличить каждое ребро на x сантиметров, то поверхность увеличится на 54 см^2. Как увеличится его объем?
9. Чугунная труба имеет квадратное сечение, ее внешняя ширина 25 см, толщина стенок 3 см. Какова масса одного погонного метра трубы (плотность чугуна 7,3 г/см^3)?
10. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого a образует с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью — угол β?
11. В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол 30°. Боковая поверхность равна S. Найдите его объем.
12. В прямом параллелепипеде стороны основания $2\sqrt{2}$ см и 5 см образуют угол 45°. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Найдите его объем.

13. Основание прямого параллелепипеда — ромб, площадь которого 1 м^2. Площади диагональных сечений 3 м^2 и 6 м^2. Найдите объем параллелепипеда.

14. Решите предыдущую задачу в общем случае, если площадь ромба Q, а площади диагональных сечений M и N.

15. Основание наклонного параллелепипеда — квадрат со стороной 1 м. Одно из боковых ребер равно 2 м и образует с каждой из прилежащих сторон основания угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.

16*. Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом 60°. Найдите объем параллелепипеда.

17*. Каждое ребро параллелепипеда равно 1 см. При одной из вершин параллелепипеда все три плоских угла острые, по 2α каждый. Найдите объем параллелепипеда.

18*. В параллелепипеде длины трех ребер, выходящих из одной вершины, равны a, b, c. Ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α (рис. 175). Найдите объем параллелепипеда.

19. По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

20. Деревянная плита в форме правильного восьмиугольника со стороной 3,2 см и толщиной 0,7 см имеет массу 17,3 г. Какова плотность дерева?

21. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см. Найдите объем призмы.

22. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, боковая поверхность равновелика сумме оснований. Найдите ее объем.

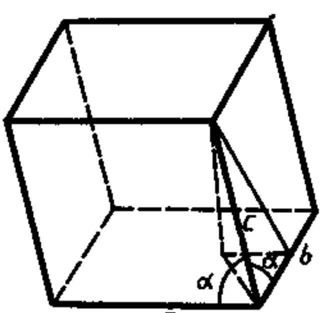


Рис. 175

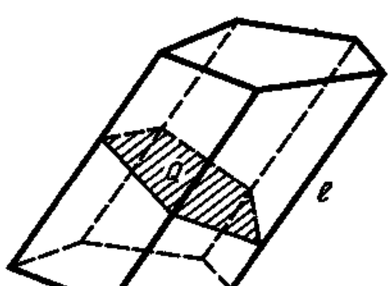


Рис. 176

23. В правильной шестиугольной призме площадь наибольшего диагонального сечения 4 м^2, а расстояние между двумя противоположными боковыми гранями 2 м. Найдите объем призмы.
24. В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите объем призмы, если площадь сечения Q, а боковые ребра равны l (рис. 176).
25. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 м, а расстояния между параллельными прямыми, содержащими ребра, 26 м, 25 м и 17 м. Найдите объем призмы.
26. Вычислите пропускную способность (в кубических метрах за 1 ч) водосточной трубы, сечение которой имеет форму равнобедренного треугольника с основанием 1,4 м и высотой 1,2 м. Скорость течения 2 м/с.
27. Сечение железнодорожной насыпи имеет форму трапеции, нижнее основание которой 14 м, верхнее 8 м и высота 3,2 м. Найдите, сколько кубических метров земли приходится на 1 км насыпи.
28. В прямой треугольной призме стороны оснований равны 4 см, 5 см и 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания. Найдите объем призмы.
29. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см^2, а площади боковых граней 9 см^2, 10 см^2 и 17 см^2. Найдите объем.
30. Основание призмы — треугольник, одна сторона которого 2 см. а две другие по 3 см. Боковое ребро равно 4 см и образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите ребро равновеликого куба.
31. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной a; одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, меньшая диагональ которого равна c. Найдите объем призмы.
32. Чему равен объем прямой четырехугольной призмы, если ее высота h, диагонали наклонены к плоскости основания под углами α и β и острый угол между диагоналями основания равен γ?
33. По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.
34. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды a, а двугранный угол при основании равен 45°. Найдите объем пирамиды.
35. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и каждое равно b (рис. 177). Найдите объем пирамиды.

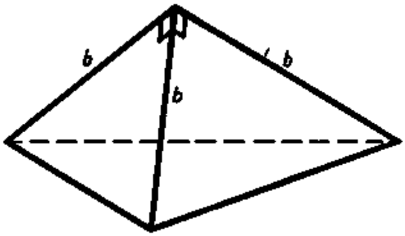


Рис. 177

36. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой a, а боковые ребра взаимно перпендикулярны.

37. Найдите объем правильного тетраэдра, если его ребро равно a.

38. Найдите объем октаэдра, если его ребро равно a.

39. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 9 м и 12 м, все боковые ребра равны 12,5 м. Найдите объем пирамиды.

40.* Основание пирамиды — равнобедренный треугольник со сторонами 6 см, 6 см и 8 см. Все боковые ребра равны 9 см. Найдите объем пирамиды.

41. Одно ребро треугольной пирамиды равно 4 см, каждое из остальных — 3 см. Найдите объем пирамиды.

42. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Каждое боковое ребро пирамиды равно l и образует со смежными сторонами прямоугольника углы α и β. Найдите объем пирамиды.

43. Найдите объем пирамиды, основание которой — треугольник с двумя углами α и β и радиусом описанного круга R. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом γ.

44. Найдите объем усеченной пирамиды с площадями оснований Q_1 и Q_2 $(Q_1 > Q_2)$ и высотой h.

45. В пирамиде с площадью основания Q_1 проведено сечение параллельно основанию на расстоянии h от него. Площадь сечения равна Q_2. Найдите высоту пирамиды.

46. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны нижнего и верхнего оснований равны a и b, а двугранный угол при ребре нижнего основания равен α. Найдите объем пирамиды.

47. Решите предыдущую задачу для случая правильной усеченной треугольной пирамиды.

48. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. В каком отношении она делит объем пирамиды?

49. Высота пирамиды h. На каком расстоянии от вершины находится сечение, параллельное основанию и делящее ее объем пополам?

§ 8. ОБЪЕМЫ И ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

73. ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА

Если тело простое, то есть допускает разбиение на конечное число треугольных пирамид, то его объем равен сумме объемов этих пирамид. Для произвольного тела объем определяют следующим образом.

Данное тело имеет объем V, если существуют простые тела, содержащие его, и простые тела, содержащиеся в нем, с объемами, сколь угодно мало отличающимися от V.

Применим это определение к нахождению объема цилиндра с радиусом основания R и высотой H.

При выводе формулы для площади круга мы построили такие два n-угольника (один — содержащий круг, а другой — содержащийся в круге), что их площади при неограниченном увеличении n неограниченно приближались к площади круга. Построим такие многоугольники для круга в основании цилиндра. Пусть P — многоугольник, содержащий круг, а P' — многоугольник, содержащийся в круге (рис. 178).

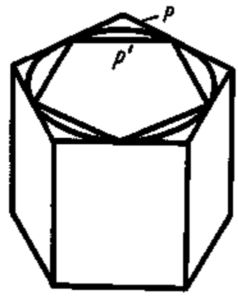


Рис. 178

Построим две прямые призмы с основаниями P и P' и высотой H, равной высоте цилиндра. Первая призма содержит цилиндр, а вторая призма содержится в цилиндре. Так как при неограниченном увеличении n площади оснований призм неограниченно приближаются к площади основания цилиндра S, то их объемы неограниченно приближаются к SH. Согласно определению объем цилиндра

$$V = SH = \pi R^2 H.$$

Итак, ***объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.***

74. ОБЪЕМ КОНУСА

Построим два многоугольника в плоскости основания конуса: многоугольник P, содержащий основание конуса, и многоугольник P', содержащийся в основании конуса (рис. 179). Построим

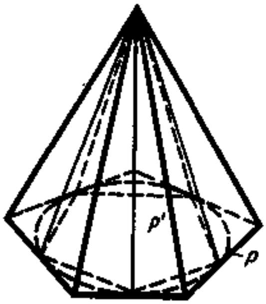


Рис. 179

две пирамиды с основаниями P и P' и с вершинами в вершине конуса. Первая пирамида содержит конус, а вторая содержится в конусе.

Как известно, существуют такие многоугольники P и P', площади которых при неограниченном увеличении числа их сторон n неограниченно приближаются к площади круга в основании конуса. Для таких многоугольников объемы построенных пирамид неограниченно приближаются к $\frac{1}{3}SH$, где S — площадь основания конуса, а H — его высота. Согласно определению отсюда следует, что объем конуса

$$V=\frac{1}{3}SH=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

Итак, ***объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.***

75. ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

З а д а ч а (15). Найдите объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований R_1 и R_2 ($R_2<R_1$), а высота h.

Р е ш е н и е. Дополним данный усеченный конус до полного (рис. 180). Пусть x — его высота. Объем усеченного конуса равен разности объемов двух полных конусов: одного — с радиусом основания R_1 и высотой x, другого —

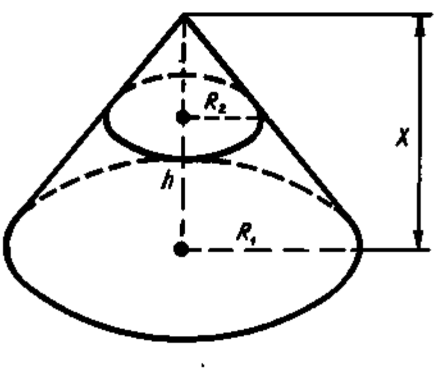


Рис. 180

с радиусом основания R_2 и высотой $x-h$. Из подобия конусов находим x:

$$\frac{x}{x-h}=\frac{R_1}{R_2}, \quad x=\frac{hR_1}{R_1-R_2}.$$

Объем усеченного конуса равен:

$$V=\frac{1}{3}\left(\pi R_1^2\frac{hR_1}{R_1-R_2}-\pi R_2^2\left(\frac{hR_1}{R_1-R_2}-h\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\frac{R_1^3-R_2^3}{R_1-R_2}=\frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right).$$

76. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОБЪЕМОВ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Телом вращения в простейшем случае называется такое тело, которое плоскостями, перпендикулярными некоторой прямой (оси вращения), пересекается по кругам с центрами на этой прямой. Круговой цилиндр, конус, шар — примеры тел вращения. Найдем формулу для вычисления объема тела вращения.

Проведем плоскость через ось тела и введем в этой плоскости декартовы координаты x, y, приняв ось тела за ось x (рис. 181). Плоскость xy пересекает поверхность тела по линии, для которой ось x является осью симметрии. Пусть $y=f(x)$ — уравнение той части линии, которая находится над осью x.

Проведем через точку $(x, 0)$ плоскость, перпендикулярную оси x, и обозначим через $V(x)$ объем части тела, лежащей слева от этой плоскости. Тогда $V(x)$ является функцией от x. Разность $V(x+h)-V(x)$ представляет собой объем слоя тела толщиной h между двумя плоскостями, перпендикулярными оси x, которые проходят через точки с абсциссами x и $x+h$. Пусть M — наибольшее, а m — наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[x, x+h]$. Тогда рассматриваемый слой тела содержит цилиндр с радиусом m, высотой h и содержится в цилиндре с радиусом M и той же высотой h (см. рис. 181). Поэтому

$$\pi m^2 h\leqslant V(x+h)-V(x)\leqslant \pi M^2 h,$$

$$\pi m^2\leqslant\frac{V(x+h)-V(x)}{h}\leqslant \pi M^2.$$

При стремлении высоты h к нулю левая и правая части последнего неравенства стремятся к одной и той же величине $\pi f^2(x)$. Средняя же часть этого неравенства при стремлении h

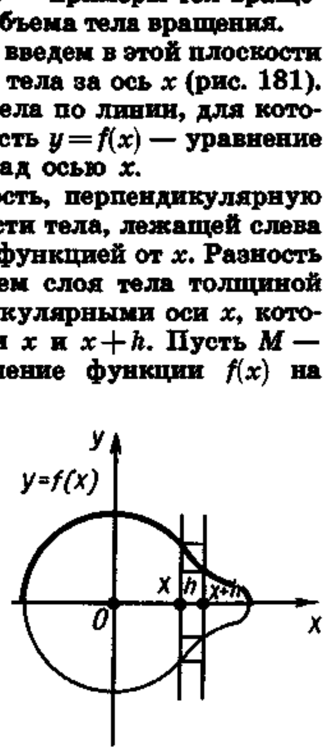


Рис. 181

к нулю стремится к производной $V'(x)$ функции $V(x)$. Следовательно:

$$V'(x)=\pi f^2(x).$$

По известной формуле анализа

$$V(b)-V(a)=\int_a^b V'(x)\,dx=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx, \quad a<b.$$

Эта формула и выражает объем части тела, находящегося между параллельными плоскостями $x=a$ и $x=b$.

77. ОБЪЕМ ШАРА

Применим выведенную формулу для объема тел вращения к вычислению объема шара.

Введем декартовы координаты, приняв центр шара за начало координат (рис. 182). Плоскость xy пересекает поверхность шара радиуса R по окружности, которая, как известно, задается уравнением

$$x^2+y^2=R^2.$$

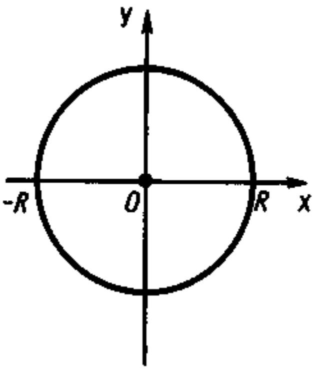


Рис. 182

Полуокружность, расположенная над осью x, задается уравнением

$$y=f(x)=+\sqrt{R^2-x^2}, \quad -R<x\leqslant R.$$

Поэтому объем шара находим по формуле

$$V=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=$$

$$=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Итак, ***объем шара равен*** $\frac{4}{3}\pi R^3$.

78. ОБЪЕМ ШАРОВОГО СЕГМЕНТА И СЕКТОРА

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью. Формулу для объема шарового сегмента получаем аналогично формуле объема шара (рис.183):

$$V=\pi\int_{R-H}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-H}^{R}=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right),$$

где R — радиус шара, а H — высота шарового сегмента.

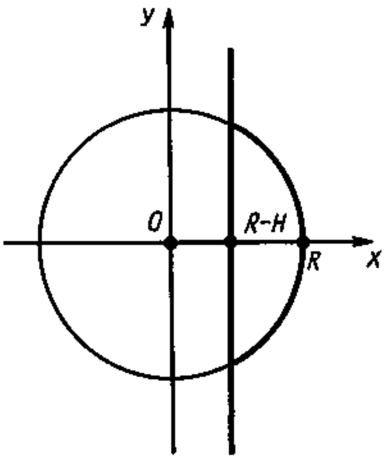


Рис. 183

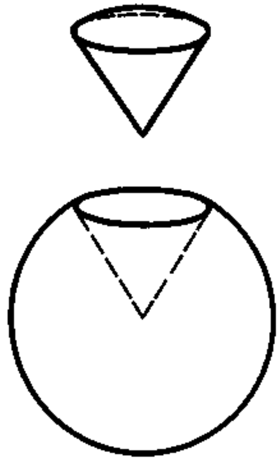


Рис. 184

Шаровым сектором называется тело, получаемое из шарового сегмента и конуса таким образом. Если шаровой сегмент меньше полушара, то шаровой сегмент дополняют конусом, у которого вершина находится в центре шара, а основанием является основание сегмента. Если же сегмент больше полушара, то указанный конус из него удаляется (рис. 184). Объем шарового сектора получаем сложением или вычитанием объемов соответствующих сегмента и конуса. Для объема шарового сектора имеем такую формулу:

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2H,$$

где R — радиус шара, H — высота соответствующего шарового сегмента.

79. ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

Впишем в цилиндр правильную n-угольную призму (рис. 185).

Площадь боковой поверхности этой призмы $S_n=P_nH$, где P_n — периметр основания призмы, а H — ее высота.

Как известно, при неограниченном увеличении n периметр P_n неограниченно стремится к длине C окружности основания цилиндра. Следовательно, площадь боковой поверхности призмы неограниченно приближается к CH. Поэтому величину CH принимают за площадь боковой поверхности цилиндра.

Таким образом, ***площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле:***

$$S = CH = 2\pi Rh,$$

где R — радиус цилиндра, а H — его высота.

80. ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА

Впишем в конус правильную n-угольную пирамиду (рис. 186). Площадь ее боковой поверхности

$$S_n = \frac{1}{2} P_n l_n,$$

где P_n — периметр основания пирамиды, а l_n — апофема.

При неограниченном увеличении n периметр основания P_n неограниченно приближается к длине C окружности основания конуса, а апофема l_n — к длине l образующей. Соответственно боковая поверхность пирамиды неограниченно приближается к $C\frac{l}{2}$. В связи с этим величину $C\frac{l}{2}$ принимают за площадь боковой поверхности конуса.

Итак, ***площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле:***

$$S = \frac{1}{2}\,Cl = \pi Rl,$$

где R — радиус основания конуса, а l — длина образующей.

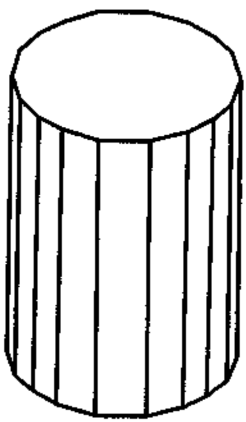


Рис. 185

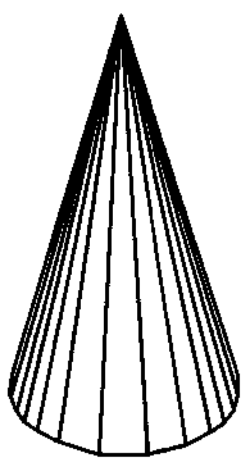


Рис. 186

Аналогично для площади боковой поверхности усеченного конуса с радиусами оснований R_1 и R_2 и образующей l получают формулу:

$$S=\pi(R_1+R_2)l.$$

81. ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ

Опишем около сферы выпуклый многогранник с малыми гранями (рис. 187). Пусть S' — площадь поверхности многогранника, то есть сумма площадей его граней.

Найдем приближенное значение площади поверхности многогранника, предполагая, что линейные размеры граней, то есть расстояние между какими-нибудь двумя точками любой грани, меньше ε.

Объем многогранника равен сумме объемов пирамид, основаниями которых являются грани многогранника, а вершиной — центр сферы (рис. 188). Так как все пирамиды имеют одну и ту же высоту, равную радиусу R сферы, то объем многогранника

$$V=\frac{1}{3}S'R.$$

Объем многогранника больше объема шара, ограниченного сферой, но меньше объема шара с тем же центром и с радиусом $R+\varepsilon$. Таким образом,

$$\frac{4}{3}\pi R^3<\frac{1}{3}S'R<\frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3.$$

Отсюда

$$4\pi R^2<S'<4\pi(R+\varepsilon)^2\left(1+\frac{\varepsilon}{R}\right).$$

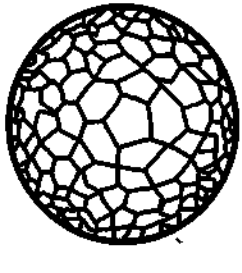


Рис. 187

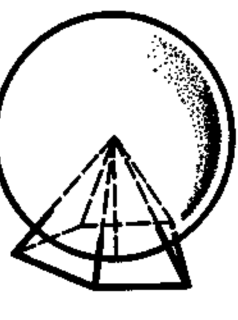


Рис. 188

Мы видим, что площадь поверхности описанного многогранника при неограниченном уменьшении размеров его граней, то есть при неограниченном уменьшении ε, стремится к $4\pi R^2$. В связи с этим величину $4\pi R^2$ принимают за площадь сферы.

Итак, ***площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле***

$$S=4\pi R^2.$$

Аналогично находят площадь сферической части поверхности шарового сектора, то есть площадь сферического сегмента. Для нее получают формулу

$$S=2\pi RH,$$

где H — высота сегмента.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Выведите формулу для объема цилиндра.
2. Выведите формулу для объема конуса.
3. Выведите формулу для объема тел вращения.
4. Выведите формулу для объема шара.
5. Что такое шаровой сегмент? Выведите формулу для объема шарового сегмента.
6. Что такое шаровой сектор? По какой формуле вычисляют объем шарового сектора?
7. По какой формуле вычисляют площадь боковой поверхности цилиндра?
8. По какой формуле находят площадь боковой поверхности конуса (боковой поверхности усеченного конуса)?
9. По какой формуле вычисляют площадь сферы?

ЗАДАЧИ

1. 25 м медной проволоки имеют массу 100,7 г. Найдите диаметр проволоки (плотность меди 8,94 г/см^3).
2. Насос, подающий воду в паровой котел, имеет два водяных цилиндра. Диаметры цилиндров 80 мм, а ход поршня 150 мм. Чему равна часовая производительность насоса, если каждый поршень делает 50 рабочих ходов в минуту?
3. Во сколько раз надо увеличить высоту цилиндра, не меняя его основание, чтобы объем увеличился в n раз? Во сколько раз надо увеличить радиус основания цилиндра, не меняя высоту, чтобы объем увеличился в n раз?
4. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму — цилиндр. Найдите отношение объемов цилиндров.
5. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, каждое ребро которой равно a.

6. Свинцовая труба (плотность свинца 11,4 г/см^3) с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Какова масса 25 м этой трубы?
7. Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 м, а образующая 2,5 м. Найдите объем кучи щебня.
8. Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого 9 м^2. Найдите объем конуса.
9. Длина образующей конуса равна l, а длина окружности основания c. Найдите объем конуса.
10. Образующая конуса l составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем конуса.
11. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 м, высота 4 м, причем цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Плотность сена 0,03 г/см^3. Определите массу стога сена.
12. Жидкость, налитая в конический сосуд высотой 0,18 м и диаметром основания 0,24 м, переливается в цилиндрический сосуд, диаметр основания которого 0,1 м. Как высоко будет стоять уровень жидкости в сосуде?
13. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны a. Найдите объем полученного тела вращения.
14. Прямоугольный треугольник с катетами a и b вращается вокруг гипотенузы. Найдите объем полученного тела (рис. 189).
15* Найдите объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований R_1 и R_2 ($R_2 < R_1$), а высота h.
16. Сосновое бревно длиной 15,5 м имеет диаметры концов 42 см и 25 см. Какую ошибку (в процентах) допускают, вычисляя объем бревна, умножая длину на площадь поперечного сечения в середине бревна?
17. Радиусы оснований усеченного конуса R и r; образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем.
18. Площадь осевого сечения усеченного конуса равна разности площадей оснований, а радиусы оснований R и r. Найдите объем этого конуса.
19. Усеченный конус, у которого радиусы оснований 4 см и 22 см, и равновеликий цилиндр имеют одну и ту же высоту. Чему равен радиус основания этого цилиндра?
20. По данным радиусам оснований R и r найдите отношение объемов усеченного конуса и полного конуса.
21. Чугунный шар регулятора имеет массу 10 кг. Найдите диаметр шара (плотность чугуна 7,2 г/см^3).

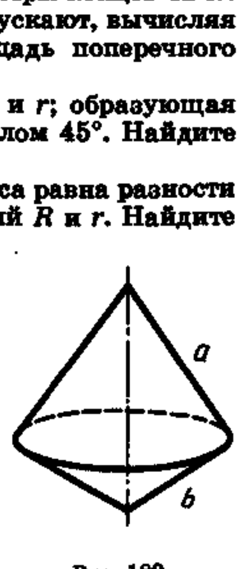


Рис. 189

22. Требуется переплавить в один шар два чугунных шара с диаметрами 25 см и 35 см. Найдите диаметр нового шара.

23. Имеется кусок свинца массой 1 кг. Сколько шариков диаметром 1 см можно отлить из этого куска? (Плотность свинца 11,4 г/см^3.)

24. Из деревянного цилиндра, высота которого равна диаметру основания, выточили шар наибольшего диаметра. Сколько процентов материала сточено?

25. Внешний диаметр полого шара 18 см. Толщина стенок 3 см. Найдите объем материала, из которого изготовлен шар.

26. Сосуд имеет форму полушара радиуса R, дополненного цилиндром. Какой высоты должна быть цилиндрическая часть, чтобы сосуд имел объем V?

27. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 3 см и 9 см. На какие части делится объем шара?

28. Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?

29. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объем общей части шара к объему целого шара?

30. Диаметр шара, равный 30 см, является осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Найдите объем части шара, находящейся внутри цилиндра.

31. Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см?

32. Круговой сектор с углом 30° и радиусом R вращается около одного из боковых радиусов. Найдите объем полученного тела.

33. Поверхности двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся их объемы?

34. Гипотенуза и катеты треугольника являются диаметрами трех шаров. Какая существует зависимость между их поверхностями?

35. Поверхность тела, образуемого вращением квадрата около стороны, равновелика поверхности шара, радиус которого равен стороне квадрата. Докажите.

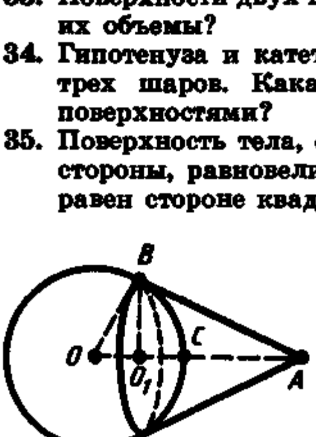


Рис. 190

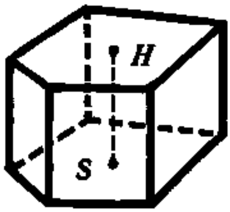
36. Радиус шара 15 см. Какую площадь имеет часть его поверхности, которую видно из точки, удаленной от центра на 25 см (рис. 190)?

37. Шар радиуса 10 см цилиндрически просверлили по оси. Диаметр отверстия 12 см. Найдите полную поверхность тела.

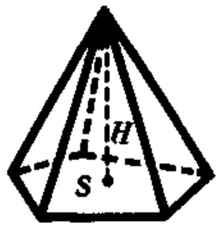
38. Цилиндрическая дымовая труба с диаметром 65 см имеет высоту 18 м.

Сколько жести надо для ее изготовления, если на заклепку расходуется 10 % материала?

39. Полуцилиндрический свод подвала имеет 6 м длины и 5,8 м в диаметре. Найдите площадь полной поверхности подвала.
40. Из круглого листа металла выштамповали цилиндрический стакан диаметром 25 см и высотой 50 см. Допустим, что площадь листа при штамповке не изменилась. Найдите диаметр листа.
41. В цилиндре площадь основания равна Q, а площадь осевого сечения M. Чему равна полная поверхность цилиндра?
42. Конусообразная палатка высотой 3,5 м с диаметром основания 4 м покрыта тканью. Сколько квадратных метров ткани пошло на палатку?
43. Крыша силосной башни имеет форму конуса. Высота крыши 2 м, диаметр башни 6 м. Найдите поверхность крыши.
44. Площадь основания конуса S, а образующие наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите боковую поверхность конуса.
45. Как относятся между собой боковая и полная поверхности равностороннего конуса (в сечении правильный треугольник)?
46. Полная поверхность равностороннего конуса равновелика поверхности шара, построенного на его высоте как на диаметре. Докажите.
47. Полукруг свернут в коническую поверхность. Найдите угол между образующей и осью конуса.
48. Радиус кругового сектора равен 3 м, его угол 120°. Сектор свернут в коническую поверхность. Найдите радиус основания конуса.
49. Сколько квадратных метров латунного листа потребуется, чтобы сделать рупор, у которого диаметр одного конца 0,43 м, другого — 0,036 м, а образующая 1,42 м?
50. Сколько надо олифы, чтобы покрасить внешнюю поверхность 100 одинаковых ведер, имеющих форму усеченного конуса, если диаметры оснований 25 см и 30 см, образующая 27,5 см и на 1 м^2 расходуется 150 г олифы?

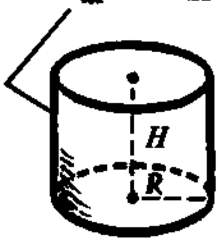


$V = SH$



$V = \frac{1}{3}SH$

$S_{бок} = 2\pi RH$



$V = \pi R^2 H$

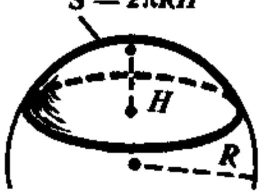
$S_{бок} = \pi Rl$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

$S = 4\pi R^2$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$S = 2\pi RH$



$V = \pi H^2 (R - \frac{H}{3})$

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

§ 1

2. Можно. 8. Указание. Возьмите точку в другой плоскости и проведите через нее и данную прямую плоскость. Примените к этой плоскости аксиому параллельных. 12. Четыре плоскости. 14. Указание. Воспользуйтесь доказательством от противного.

§ 2

2. Нельзя. 5. 1) 6 м; 2) 4,2 дм; 3) 6,2 см; 4) $\frac{a+b}{2}$. 6. 1) 1 м; 2) 0,6 дм; 3) 2,1 см; 4) $\frac{|a-b|}{2}$. 7. 1) 37,5 см; 2) 9,9 см; 3) 15 см; 4) $c\left(1+\frac{b}{a}\right)$. 8. 1) 7 м; 2) 2 м; 3) $a+c-b$. 9. Нельзя. 13. 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 8 см; 4) $\frac{bc}{a+c}$. 19. Указание. См. задачу 16. 20. Не всегда. Указание. См. задачу 16. 26. Решения нет, если точка лежит в плоскости прямых. 32. $A_1B_1=a$. 35. Указание. Сравните отношение отрезков двух произвольных прямых: $X_1X_2X_3$ и $Y_1Y_2Y_3$. 38. Средней линией. 39. Не может. 40. Может. 41. Указание. Отношение отрезков сохраняется. 42. Указание. Проекция перпендикулярного диаметра проходит через середины хорд, параллельных проекции данного диаметра.

§ 3

2. Указание. См. задачу 1. 3. 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{a^2-b^2+d^2}$; 4) $\sqrt{a^2-c^2+2d^2}$. 7. 2 м. 8. $BD=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $CD=\sqrt{a^2+c^2}$. 14. 2,6 м. 15. $\approx 3{,}9$ м. 16. 9 м. 17. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. 19. 1 м. 20. 6,5 м. 21. $\sqrt{a^2-\frac{b^2}{2}}$. 22. Окружность. 23. 6 см, 15 см. 24. 1) 15 см, 41 см; 2) 4 см, 8 см. 25. 9 см. 27. 6 м. 28. 5 м, 3 м. 29. $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. 31. $\sqrt{b^2-a^2}$. 32. $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$. 33. 0,36 м или 0,44 м. 36. 1) 4,25 см; 2) 6.75 см; 3) $\frac{a+b}{2}$. 37. 1) 1,05 см; 2) 0,65 см; 3) $\frac{|a-b|}{2}$. 38. 0,6 м. 39. $\frac{am}{m+n}$ (m соответствует основанию, через которое проведена плоскость). 40. $\frac{a}{2}$. 41. Длина перпендикуляра $\sqrt{2a^2-b^2}$, длина стороны $\sqrt{b^2-a^2}$. 42. $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-a^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}$. 43. $\sqrt{2}$ м. 44. $2\sqrt{2}$ м. 46. 2,5 м. 47. 6 м. 48. 14 см. 49. $\sqrt{a^2+b^2}$. 50. $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{8}}$. 51. $\sqrt{2b^2-a^2}$. 52. 2,5 м. 53. $\sqrt{b^2+c^2-\frac{b^4}{a^2}}$. 55. Указание. Прямые, перпендикулярные плоскости, параллельны. 56. $\sqrt{23}$ м. 57. 4 м, 59. 1) 11 м; 2) 13 м; 3) 8 м; 4) 7 м; 5) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 6) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. 60. $\sqrt{a^2+b^2}$. 61. 1,3 м. 62. 1,7 м.

§ 4

1. На оси z. 3. (1; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; 3), (1; 2; 0), (1; 0; 3), (0; 2; 3). 4. Расстояние от плоскости xy равно 3, от плоскости xz равно 2, от плоскости yz равно 1;

расстояния от осей x, y, z соответственно равны $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$; расстояние от начала координат равно $\sqrt{14}$. **6.** (2; 2; 2) и (−2; −2; −2). **7.** $C(0;\ 0;\ 0)$. **8.** $x+2y+3z=7$. **12.** $B(0;\ -1;\ 3)$. **13.** 1) $D(6;\ 2;\ -2)$; 2) $D(0;\ -2;\ 2)$; 3) $D(-1;\ 7;\ -2)$. **18.** (−1; −2; −3); (0; 1; −2); (−1; 0; 3). **20.** Указание. См. задачу 16. **24.** (−1; −2; 1). **25.** 1), 2), 4) Не существует; 3) существует. **30.** 90°. **31.** $\alpha+\beta$ или $|\alpha-\beta|$. **32.** 40° или 20°. **36.** 1) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **37.** 30°. **38.** $a\sqrt{6}$. **39.** $a\sqrt{2}$. **40.** $3a$. **41.** 30°. **44.** 30°. **45.** 13 м; $\sqrt{409}$ м. **46.** 1) $\cos\alpha=\frac{1}{14}$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{21}$. **47.** 3,36 м. **48.** 1) $\frac{3a^2}{8}$; 2) $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$; 3) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **49.** 1) $\frac{30}{7}$ м² или 48 м²; 2) 2,5 м² или $\frac{128}{7}$ м². **51.** $D(-2;\ 3;\ 0)$. **52.** $D(2;\ 1;\ -2)$. **53.** $n=\frac{4}{3}$, $m=\frac{3}{2}$. **55.** 1) $n=\frac{1}{3}$; 2) $n=-1$; 3) $n=2$; 4) $n=4$. **56.** $c=1$. **57.** $\sqrt{|\bar a|^2+|\bar b|^2+|\bar c|^2+|\bar a||\bar b|}$. **58.** 1) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\varphi=90°$. **60.** $\cos C=\sqrt{\frac{2}{15}}$. **62.** $\cos\varphi=\cos\alpha\cos\beta$. **63.** 60°. **64.** $\cos\varphi=\frac{\cos\beta-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

§ 5

1. 2) 60°. **4.** $\cos\varphi=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\cos\beta=\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. **6.** $n(n-3)$. **9.** Указание. Воспользуйтесь теоремой 3.3. **10.** 144 см². **11.** 7,5 см. **12.** 12 см. **13.** $a\sqrt{5}$, $2a$, $2a^2$, $a^2\sqrt{3}$. **14.** $3a^2$. **15.** $\cos x=\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **16.** $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. **17.** 22 см. **18.** $Q\sqrt{2}$. **19.** 12. **20.** 2 м. **21.** 4 м. **23.** 45 см². **24.** 1) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab+2a^2$; 3) $6ab+3a^2\sqrt{3}$. **25.** $3l^2\sqrt{3}$. **26.** 12 м². **29.** 188 м². **30.** ≈262 см². **31.** 10 см². **32.** $2a$, $a\sqrt{2}$. **33.** 13 м, 9 м. **34.** 2 м², 3 м². **35.** 1) 3; 2) 7; 3) 11. **36.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **37.** 2 м². **38.** 1464 см². **39.** $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$. **40.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$. **41.** 3 см. **42.** 12 см. **43.** $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\alpha_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **44.** $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2}$. **45.** $2\sqrt{3}$ см. **46.** 5 см, 6 см. **47.** 26 м². **48.** 540 см². **49.** 10 м². **53.** $\frac{35}{6}$ см, $\frac{20}{3}$ см, $\frac{15}{2}$ см. **55.** 11 м. **56.** $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. **57.** 9 см. **58.** $\cos x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **59.** 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$. **60.** 1) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$; 2) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$; 3) $\sqrt{h^2+\frac{3a^2}{4}}$. **61.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{4}\left(a^2+\sqrt{a^2+12h^2}\right)$; 2) $a\left(a+\sqrt{a^2+4h^2}\right)$; 3) $\frac{3a}{2}\left(a\sqrt{3}+\sqrt{3a^2+4h^2}\right)$. **62.** $2r\left(r\sqrt{3}+\sqrt{3a^2-r^2}\right)$. **63.** 1,8 м, 4 м. **64.** $3a^2$.

65. $\dfrac{Q}{\cos\varphi}$. 66. $\cos\varphi=\dfrac{Q}{S}$. 67. 16 см и 6 см или 12 см и 8 см. 68. $\sqrt{2}$ см. 70. 9 см. 71. 1 дм. 72. 6 см. 73. 2 см. 74. $\dfrac{a^2-b^2}{4}$. 75. $20\sqrt{2}$. 76. 24 м^2, 30°. 77. 168 м^2. 78. 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+b^2+(a+b)\sqrt{12h^2+(a-b)^2}\right)$; 2) $a^2+b^2+(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$; 3) $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3}(a^2+b^2)+(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b)^2}\right)$. 82. 109°28′. Указание. Докажите сначала, что в каждой вершине октаэдра сходятся две пары перпендикулярных ребер. Затем примените формулу задачи 4.

§ 6

1. 5 м. 3. 36 см^2. 4. 3 дм. 5. 3 дм. 6. $\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{2}$. 8. 10 м. 9. 5 м. 10. $\dfrac{l}{2}$. 11. R^2. 12. $2R^2\sin\alpha$. 13. 500. 14. $\dfrac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}$, если $\alpha+\varphi<90°$. 16. $\dfrac{H}{\sqrt{2}}$. 17. $\dfrac{3l}{4}$. 18. 3 см. 19. 5 м. 20. $R-r$. 21. a, $2a$. 22. 30 дм^2. 23. 9 дм^2. 24. $\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{M}+\right.$ $\left.+\sqrt{m}\right)^2$. 26. $\dfrac{HR\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$. 27. $\dfrac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. 29. 16π м^2. 31. $\dfrac{\pi R^2}{4}$. 32. πR. 33. ≈ 785 км. 34. 12 см. 35. 12 см. 36. 5 см. 37. $\dfrac{\pi R^2}{4}$. 40. 3 см. 41. 8 см. 42. $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. 43. $R\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$; $\dfrac{R}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$; $\dfrac{2R}{\sin\alpha}$. 45. 4π м. 46. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. 49. $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

50. $R=\dfrac{a}{4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$, $r=\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}}$. 51. $2R\left(1-\dfrac{4}{3}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

52. 1) $2\sqrt{R^2-\dfrac{a^2}{3}}$; 2) $2\sqrt{R^2-\dfrac{a^2}{2}}$; 3) $2\sqrt{R^2-a^2}$. 53. $\dfrac{a\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}$.

54. $R=\dfrac{a}{2\sin 2\alpha\cdot\sin\dfrac{180°}{n}}$.

§ 7

1. 6 см. 2. $\approx 8{,}4$ г/см^3. 4. 25 см. 5. 1,8 г/см^3. 6. $\approx 2{,}29$ м. 7. 30 м. 8. Вдвое. 9. $\approx 192{,}72$ кг. 12. 60 см^3. 13. 3 м^3. 14. $\sqrt{\dfrac{MNQ}{2}}$. 15. $\sqrt{2}$ м^3. 16. $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$. 17. $2\sqrt{\sin 3\alpha\sin^3\alpha}$. 18. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. 19. 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2b$; 2) a^2b; 3) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$. 20. 0,5 г/см^3. 21. 3 см^3. 22. $\dfrac{a^3}{8}$. 23. 6 м^3. 25. 3060 м^3. 26. 6048 м^3/ч. 27. 35 200 м^3. 28. 48 см^3. 29. 12 см^3. 30. 2 см. 31. $\dfrac{1}{8}ac\sqrt{12a^2-3c^2}$. 32. $\dfrac{h^3\sin\gamma}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. 33. 1) $\dfrac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; 2) $\dfrac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$; 3) $\dfrac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$. 34. $\dfrac{3a^3}{4}$.

Указание. Высота пирамиды равна радиусу окружности, вписанной в основание. 35. $\frac{1}{6}b^3$. 36. $\frac{a^3}{12\sqrt{2}}$. 37. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. 38. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Указание. Разбейте октаэдр на две правильные четырехугольные пирамиды. 39. 360 м^3. 40. 48 см^3. Указание. Основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания пирамиды. 41. $\sqrt{11}$ см^3. 42. $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$. 43. $\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma$. 45. $\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}$. 46. $\frac{1}{6}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. Указание. Воспользуйтесь формулой задачи 44. 47. $\frac{1}{24}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. 49. $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$.

§ 8

1. $\approx 0{,}75$ мм. 2. ≈ 4500 л. 3. В n раз; в $\sqrt{n}$ раз. 4. 4 : 1. 5. $\frac{3}{4}\pi a^3$. 6. ≈ 61 кг. 7. $\approx 6{,}3$ м^3. 8. 9π м^3. Указание. Высота конуса равна радиусу его основания. 9. $\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2l^2-c^2}$. 10. $\frac{1}{3}\pi l^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. 11. $\approx 1{,}6$ т. 12. $\approx 0{,}35$ м. 13. $\frac{\pi a^3}{4}$. 14. $\frac{\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. 16. ≈ 2 %. 17. $\frac{\pi}{3}|R^3-r^3|$. 18. $\frac{\pi^2}{3}|R^3-r^3|$. 19. 14 см. 20. $1-\left(\frac{r}{R}\right)^3$, если $r<R$. 21. ≈ 14 см. 22. ≈ 39 см. 23. 167. 24. $33\frac{1}{3}$ %. Указание. Диаметр шара равен диаметру цилиндра. 25. ≈ 2148 см^3. 26. $\frac{V}{\pi R^2}-\frac{2}{3}R$. 27. 45π см^3, 243π см^3. 28. 0,028. 29. 5:16. 30. 3528π см^3. Указание. Разбейте указанную часть шара на цилиндр и два сегмента. 31. $112{,}5\pi$ дм^3 или 450π дм^3. 32. $\frac{1}{3}\pi R^3(2-\sqrt{3})$. Указание. Тело является шаровым сектором. 33. $\sqrt{m^3}:\sqrt{n^3}$. 34. Большая поверхность равновелика сумме двух других. 35. Указание. Выразите обе поверхности через сторону квадрата. 36. 180π см^2. 37. 512π см^2. 38. $\approx 40{,}4$ м^2. 39. ≈ 116 м^2. 40. 75 см. 41. $\pi m+2Q$. Указание. По площади основания найдите его радиус. 42. $\approx 25{,}3$ м^2. 43. $\approx 33{,}98$ м^2. 44. $\frac{S}{\cos\alpha}$. Указание. По площади основания найдите его радиус. 45. 2 : 3. 46. Выразите поверхность шара и конуса через длину образующей конуса. 47. 30°. 48. 1 м. Указание. Длина окружности основания равна длине дуги сектора. 49. $\approx 1{,}04$ м^2. 50. $\approx 4{,}3$ кг.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

10 КЛАСС

§ 1. Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия

§ 2. Параллельность прямых и плоскостей

§ 3. Перпендикулярность прямых и плоскостей

§ 4. Декартовы координаты и векторы в пространстве

11 КЛАСС

§ 5. Многогранники

§ 6. Тела вращения

§ 7. Объемы многогранников

§ 8. Объемы и поверхности тел вращения

Навчальне видання

ПОГОРЄЛОВ Олексій Васильович

ГЕОМЕТРІЯ
Стереометрія

Підручник для 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів

Затверджено Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено.

Відповідальний за випуск *Ю. О. Корбуш*
Художник обкладинки *А. А. Зінченко*

Підписано до друку з діапозитивів 30.09.2004. Формат 60×90/16. Папір офс.
Гарнітура шкільна. Друк офс. Ум. друк. арк. 9,00. Ум. фарбовідб. 9,50.
Обл.-вид. арк.9,14. Тираж 100 026 прим. Зам. № 4-849.

УВЦ «Школяр», 02094, Київ, вул. Сергієнка, 18.
Свідоцтво ДК № 360 від 14.03.2001 р.

Віддруковано з готових діапозитивів ТОВ «Оберіг»
61140, м. Харків, проспект Гагаріна, 82/68.